目　　录

第零章　有关Banach空间几何的若干知识

本章是全书的预备篇，是叙述正文所必需的，属于Banach空间几何学的若干基本概念和命题。本章绝大部分内容可在参考文献〔1—4〕中查到，因此除最后二定理外，其余均未写出证明。

文中总以$[X,\|\cdot\|]$表示实的 Banach 空间，$X^*=[X,\|\cdot\|]^*$是 X的共轭空间。$S(X)$，$U(X)$分别是X 的单位球面和单位球；$S(X^*)$，$U(X^*)$，$S(X^{**})$，$U(X^{**})$……等记号意义自明。

§1　基　本　定　理

范数拓扑与弱拓扑的关系

记 $\sigma(X, X^*)$ 为 X上弱拓扑，$\sigma(X^*, X)$为 X^*上弱*拓扑，$J_X(X)$为在典型嵌入映射下 X于 X^{**} 中的像。

定理 0.1　$[X,\sigma(X,X^*)]^*=X^*,[X^*,\sigma(X^*,X)]^*=J_X(X)$。

定理 0.2　(Banach-Mazur) 若A是X中凸集，则A弱闭⇔A闭。

定理 0.3　(Banach-Alaoglu-Bourbaki)$[U(X^*),\sigma(X^*,X)]$是紧 Hausdorff 拓扑空间。

定理 0.4　(Goldstine-Weston) $J_X(X)$在X^{**}中弱*稠。

定理 0.5　范数拓扑与弱拓扑等价⇔X 是有限维空间。

支撑点与支撑泛函

定义 0.1　A 是X 的有内点的凸集，A 的边界上点x 称为支撑点，乃指存在$f\in S(X^*)$，$f(x)=\sup\limits_{y\in A}f(y)$。这样的 f称为支撑泛函。

定理 0.6　(第一Bishop-Phelps定理) C 是X的有界闭凸子集，C 的支撑点全体在C 的边界上稠。

定理 0.7 （第二Bishop-Phelps 定理）C 是 X 的有界闭凸子集，在C 上达到最大值的线性泛函全体在 X^*中稠.

定理 0.8 (James) X^* 中每一个 f 均能在 X 的单位球上达到自身范数$\Leftrightarrow X$ 自反.

端点表示问题

定理 0.9 (Minkowski)K 是 n 维空间 X中紧凸集，对于何任$x \in K$，存在$x_j \in \text{ext}(K)$——K的端点集——和 $a_j \geq 0(j=1,2,\cdots,m)$，$\sum_{j=1}^{m} a_j = 1$，使

$$x = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j$$

这里 $m \leq n+1$.

定理 0.10 (Krein-Milman) K 是X的非空紧凸集

$$K = \overline{\text{cov}}\,(\text{ext}(K))$$

定理 0.11 (Choquet) K是 X 的非空紧凸集，对于任何$x_0 \in K$，存在集中于 $\text{ext}(K)$ 上的概率测度μ_{x_0}，$\mu_{x_0}(K) = \mu_{x_0}(\text{ext}(K)) = 1$ 且

$$f(x_0) = \int_K f(x) d\mu_{x_0} \quad (f \in X^*).$$

§2 基

基、基列与块基列

定义 0.2 X 中点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 X的 Schauder 基（简称基）乃指对任何 $x \in X$，存在唯一的一组数$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n .$$

定义 0.3 X 中点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$称为X的规范基乃指$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是基，且$\|x_n\| = 1(n=1, 2, \cdots)$.

定理 0.12 每个无穷维 Banach 空间必含有存在基的闭子空间。

定理 0.13 X 中点列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基$\Leftrightarrow$ (1) $x_n \neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$，(2) 存在 $k>0$，对任何实数列$\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$，正整数n，

$m,n<m$，恒有 $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leqslant k \|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|$，（3）$X=\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。

定义 0.4 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 Y 的基 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价乃指对任何 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 在 X 中收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ 在 Y 中收敛。

定理 0.14 X 的基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 Y 的基 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价 $\Leftrightarrow$ 存在从 X 到 Y 的满线性同胚 T：$X \longrightarrow Y$，$Tx_n=y_n(n=1, 2, \cdots)$。

定理 0.15 有基的 Banach 空间有不可数个两两不等价的规范基。

定义 0.5 X 以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为基，$P_n(n=1, 2, \cdots)$ 称为 X 上的射影算子乃指 $P_n x=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ (n=1, 2, \cdots)$。这里

$$x=\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j.$$

定义 0.6 称 $\sup_n \|P_n\|$ 是相对于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基常数。

定义 0.7 X 中点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为基序列乃指 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的基。

定义 0.8 若 X 以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为基，如对数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和自然数的增列 $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$，$\left\{\sum_{n=P_j+1}^{P_{j+1}} a_n x_n\right\}_{j=0}^{\infty}$ 是基序列，则称其为块基列。

定理 0.16 设 Y 是有基空间 X 的无穷维闭子空间，则 Y 必有子空间 Z，Z 的基与 X 的一个块基列等价。

单调基、收缩基与有界完备基

定义 0.9 基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为单调基乃指对任何 $x \in X$，$x=\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$，$\left\{\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是增列。

定义 0.10 基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为收缩基乃指对任何 $f \in X^*$

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{f(x): x=(I-P_n)x, \|x\| \leqslant 1\}=0$$

定义 0.11 基 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为有界完备基乃指对任何数列

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\sup_n\|\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\|<\infty$ 蕴涵 $\sum_{j=1}^{\infty}a_jx_j$ 在X中收敛.

定理 0.17 设X 以$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为基，下列说法等价:

〈1〉 X 自反;

〈2〉 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收缩且有界完备;

〈3〉 X 的每个基均收缩;

〈4〉 X 的每个基均有界完备.

无条件基与对称基

定义 0.12 基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为无条件基乃指对任何X 中元$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$，级数无条件收敛，即对自然数的任何重排$\{\pi(n)\}_{n=1}^{\infty}$，

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\pi(n)}x_{\pi(n)}.$$

定理 0.18 X 以$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无条件基，下列说法等价:

〈1〉 X 自反;

〈2〉 X 弱序列完备且不含与 l^1 同构的子空间;

〈3〉 X 不含与 l^1 或c_0 同构的子空间;

〈4〉 X 及 X^* 均不含与 l^1 同构的子空间;

〈5〉 X^{**} 可分.

定义 0.13 基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称对称基系指对自然数的任何重排$\{\pi(n)\}_{n=1}^{\infty}$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 等价.

定义 0.14 基$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称子列不变基乃指对自然数的任何子列$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$与$\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 等价.

定理 0.19 对称基是无条件基和子列不变基.

§ 3 凸性、H 性质与光滑性

诸凸性概念及其间关系

定义 0.15 X 称为一致凸 (UR) 乃指对任何的$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$，$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$ 蕴涵 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

定义 0.16 X 称为弱一致凸 (WUR) 乃指对任何 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(x)$，$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$蕴涵$\lim_{n\to\infty}f(x_n-y_n)=0$,$(f\in X^*)$

定义 0.17 X 称为局部一致凸(LUR)乃指对任何 x_0, $x_n \in S(X)(n=1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0+x_n\|=2$ 蕴涵$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0-x_n\|=0$.

定义 0.18 X 称为弱局部一致凸(WLUR)乃指对任何 x_0, $x_n \in S(X)(n=1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_0+x_n\|=2$ 蕴涵 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_0-x_n)=0(f\in X^*)$.

定义 0.19 X 称为中点局部一致凸(MLUR)乃指对任何 x_0, x_n, $y_n \in S(X)(n=1,2, \cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n-2x_0\|=0$ 蕴涵 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$.

定义 0.20 X 称为严格凸 (R)乃指对任何的 $x_0, y_0 \in S(x)$, $\|x_0+y_0\|=2$蕴涵$x_0=y_0$

定义 0.21 X 称为具有H性(H)乃指对任何 $x_o, x_n \in X(n=1,2,\cdots)\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x_o\|$和$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_o)(f\in X^*)$蕴涵$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_o\|=0$.

定义 0.22 X 称为 H严格凸 (HR) 乃指 X具有H 性质而且严格凸。

定义 0.23 X 称为具有一致 Kadec-Klee 性质 (UKK) 乃指对任何 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$, 使当$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset U(X)$, $x_n \xrightarrow{w} x_o$, $\text{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon$ 蕴涵$\|x_o\|<\delta$. (这里 $\text{sep}(x_n)=\inf\limits_{n\neq m}\|x_n-x_m\|$).

定义 0.24 X 称为接近一致凸 (NUR) 乃指对 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使$\|x_n\|\leqslant 1$, $\|x_n-x_m\|\geqslant\varepsilon$蕴涵$\text{cov}(x_n)\cap B_\delta(0)\neq\varnothing\phi$

定义 0.25 X称为k一致凸(KUR)指对任何 $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k+1}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_1^{(n)}+x_2^{(n)}+\cdots+x_{k+1}^{(n)}\|=k+1$ 蕴涵

$\Delta(x_1^{(n)}, \cdots, x_{k+1}^{(n)})=$

$$\sup\left\{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1^{(n)}) & f_1(x_2^{(n)}) & \cdots & f_1(x_{k+1}^{(n)}) \\ f_2(x_1^{(n)}) & f_2(x_2^{(n)}) & \cdots & f_2(x_{k+1}^{(n)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k(x_1^{(n)}) & f_k(x_2^{(n)}) & \cdots & f_k(x_{k+1}^{(n)}) \end{vmatrix} : f_1, \cdots, f_k \in U(X^*)\right\} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$$

X 称为k'一致凸（k'UR）指的是对任何 $x_{ni}\in S(X)(n=1,2,\cdots;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k')$，$\|x_{n,1}+\cdots+x_{n,k'}\|\to k'(n\to\infty)$ 蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n,i}-x_{n,j}\|=0(i,\ j=1,2,\cdots k')$$

定义 0.26 X 称为各向一致凸（URED）乃指对任何 $\varepsilon>0$，$0<\varepsilon\leqslant 2$ 和 $0\neq z\in X$

$$\inf\left\{1-\|x+\frac{\lambda}{2}z\|:x\in S(X),\ \|\lambda z\|\geqslant\varepsilon\right\}>0$$

定义 0.27 X 称为弱紧集方向一致凸（URWC）乃指对任何 ε，$0<\varepsilon\leqslant 2$ 和任何不含零点的非空弱紧子集 A

$$\inf\left\{\inf\left\{1-\|x+\frac{\lambda}{2}z\|:x\in S(X),\ \|\lambda z\|\geqslant\varepsilon\right\}:\ z\in A\right\}>0$$

定理 0.20 诸凸性之间有如下蕴涵关系（见图 1）

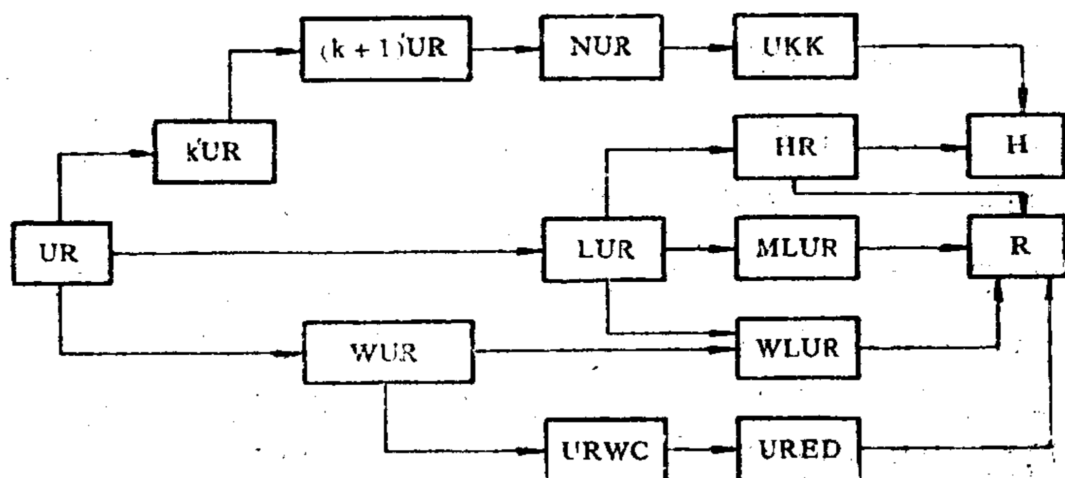


图 1

光滑性、可微性及其间关系

定义 0.28 X 称为光滑（S）乃指对任何 $x\in S(X)$，存在唯一的 $f\in S(X^*)$，使 $f(x)=1$．由$S(X)$到$S(X^*)$的上述映射称为支撑映射，并记 x 处支撑泛函 f 为 $r(x)$。

定理 0.21 若X光滑，则支撑映射是范数——弱*连续的。

定义 0.29 X称为很光滑（VS）乃指X光滑且支撑映射是范数——弱连续的.

定义 0.30 X称为强光滑（SS）乃指X光滑且支撑映射是范数——范数连续的.

定义 0.31 X称为一致光滑（US）乃指对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x\in S(X)$，$0<\|y\|<\delta$时

$$(\|x+y\|+\|x-y\|-2)/\|y\|<\varepsilon$$

定义 0.32 X称为 Gateaux 可微（G），乃指存在$S(X)\times S(X)$上泛函$g(x, y)$，对$x, y\in S(X)$，$\varepsilon>0$有$\delta(x, y, \varepsilon)>0$，当$0<|\lambda|<\delta$时$\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-g(x, y)\right|<\varepsilon$.

易知$g(x, y)=\langle y, r(x)\rangle$，这里$\langle y, r(x)\rangle$为$r(x)$在$y$处之值.

定义 0.33 X称为一致 Gateaux 可微(UG）乃指存在$S(X)\times S(X)$上泛函$g(x, y)$，对任意$y\in S(X)$，$\varepsilon>0$存在$\delta(y, \varepsilon)>0$，当$0<|\lambda|<\delta$时对一切$x\in S(X)$

$$\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-g(x, y)\right|<\varepsilon$$

定义 0.34 X称为 Frechet 可微（F），乃指存在$S(X)\times S(X)$上泛函$g(x, y)$，对任意$x\in S(X)$，$\varepsilon>0$有$\delta(x, \varepsilon)>0$，当$0<|h|<\delta$时对一切$y\in S(X)$

$$\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-g(x, y)\right|<\varepsilon$$

定义 0.35 X称为一致 Frechet 可微（UF），乃指存在$S(X)\times S(X)$上泛函$g(x, y)$，对任何$\varepsilon>0$有$\delta(\varepsilon)>0$，当$0<|h|<\delta$时对一切$x, y\in S(X)$

$$\left|\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}-g(x,y)\right|<\varepsilon$$

定理 0.22 光滑性、可微性、支撑映射的连续性以及共轭空间的凸性之间有如下蕴涵关系（见图2）

支撑映射连续性　　X 光滑性　　X 可微性　　X^* 凸性

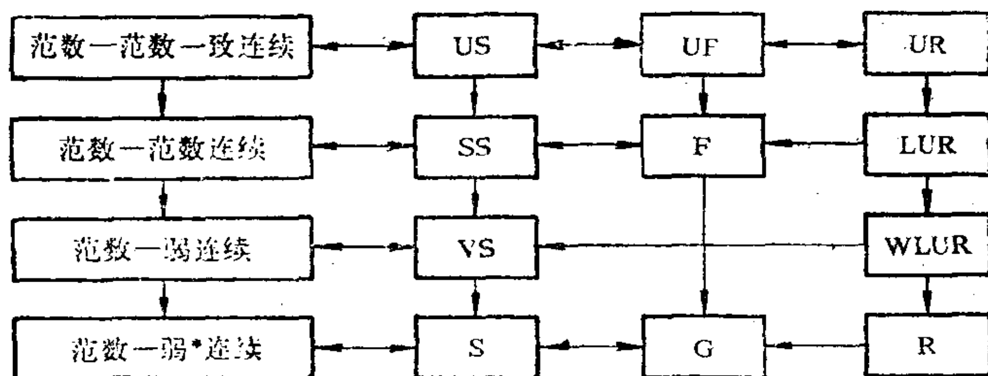


图 2

定理 0.23　X^* 一致 G 可微 $\Leftrightarrow X$ 弱一致凸.

定理 0.24　若 X 自反，则 $X(F)$ 可微 $\Leftrightarrow X^*$ 是 H 严格凸.

定理 0.25　X 弱一致凸且弱序列完备（或 X 不含与 l^1 同构的子空间且弱序列完备）蕴涵 X 自反.

再赋范问题

定理 0.26　可分 Banach 空间 X 可赋以与原范数等价的严格凸且光滑的范数.

定理 0.27　可分 Banach 空间 X 可赋与原范数等价的局部一致凸范数且由新范数生成的共轭范数（F）可微（X^* 上范数 $|||\cdot|||^*$ 称为共轭范数乃指在 X 上存在与原范数等价的范数 $|||\cdot|||$，使 $|||\psi|||^*=\sup\limits_{x\neq 0}(\psi(x)/|||x|||)$）.

定理 0.28　自反 Banach 空间 X 可赋以与原范数等价的局部一致凸且（F）可微的范数；新范数生成的共轭范数也是局部一致凸和（F）可微的.

定理 0.29　若 X^* 是可分 Banach 空间，则 X 可赋与原范数等价的，本身以及共轭范数均为局部一致凸和(F)可微的范数.

§4　自反性、超自反性与空间其他性质

自反性等价条件

定理 0.30　下述说法等价

〈1〉　X 自反；

〈2〉 X^* 自反；

〈3〉 $U(X)$弱紧；

〈4〉 $U(X)$弱序列紧；

〈5〉 X的每个闭子空间自反；

〈6〉 X 的每个闭可分子空间自反；

〈7〉 任何 $f\in X^*$ 在 $U(X)$上可达到范数$\|f\|$；

〈8〉 X的每个闭凸集有范数最小元；

〈9〉 X 的每个闭凸集是可近集，即对任何的 $x\in X$，有$y\in A$ 使$\|x-y\| = \inf\limits_{z\in A}\|x-z\|$；

〈10〉 两个不交闭凸子集，只要其中之一有界，则可用超平面严格分离；

〈11〉 X 的任何有界闭凸集的递减列有非空交；

〈12〉 X^* 的每个等价范数都是共轭范数；

〈13〉 X^* 的每个弱闭凸集是弱*闭的。

空间诸性质之间关系

定义 0.36 X 称为一致非 $l_n^{(1)}$（局部一致非$l_n^{(1)}$）$(n\geqslant 2)$ 乃指存在 $\delta>0$（$\forall x\in S(X)$，存在 $\delta_x>0$），对任何x_1，x_2，…，$x_n\in S(X)$（x_2，x_3，…，$x_n\in S(X)$），成立

$$\min\|x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n\|<n-\delta\quad(\min\|x\pm x_2\pm\cdots\pm x_n\|<n-\delta_x)$$

这里 min 取自一切可能的正负号排列。

定义0.37 X 称为B-凸的乃指存在$n\geqslant 2$，X是一致非$l_n^{(1)}$的。

定义 0.38 X称为非$l_n^{(1)}$$(n\geqslant 2)$乃指对任何$x_1$，…，$x_n\in S(X)$有 $\min\|x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n\|<n$。

定义 0.39 X 称为一致非方（局部一致非方）乃指存在$\delta>0$（$\forall x\in S(X)$，存在 $\delta_x>0$），使对任何x，$y\in S(X)$（$y\in S(X)$），$\max\{\|x+y\|,\ \|x-y\|\}\geqslant 1+\delta$（$\geqslant 1+\delta_x$）。

定义 0.40 X 称为非方乃指对任何 x，$y\in S(X)$

$$\max\{\|x+y\|,\ \|x-y\|\}>1$$

定理 0.31 X（一致）非方$\Leftrightarrow X$（一致）非$l_2^{(1)}$。

定理 0.32 X 包含与 c_0 或 l^1 同构的子空间蕴涵 X 非 B-凸。

定义 0.41 X 称为具有 Banach-Saks性质(BSP)乃指对任何有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，有子列 $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nk}}{k}=x_0\in X$$

定义 0.42 X 称为弱紧生成空间（WCG）乃指存在弱紧集 K，使 $X=\overline{\text{span}K}$。

定义 0.43 X 称为亚自反的指 $\dim(X^{**}/J_x(X))<\infty$。

定义 0.44 X 称为具有 Radon-Nikodym 性质(RNP)乃指对每个有限完备非负测度空间 $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ 和每一个具有有界变差的、μ连续的向量测度 $m:\Sigma\to X$，存在 $f\in L^1(\mu,\ X)$ 使 $m(E)=\int_E f d\mu(E\in\Sigma)$。

定义 0.45 X 中子集 K 称为可凹集（σ 可凹集）指对任何 $\varepsilon>0$，有 $x_\varepsilon\in K$，使 $x_\varepsilon\overline{\in}\ \overline{\text{cov}}(K\backslash B(x_\varepsilon,\varepsilon))(x_\varepsilon\overline{\in}\ \overline{\sigma\text{-cov}}(K\backslash B(x_\varepsilon,\varepsilon)))$。这里 $B(x_\varepsilon,\ \varepsilon)=\{x\in X:\|x-x_\varepsilon\|\leqslant\varepsilon\}$。

定理 0.33 下述说法等价

‹1› X 具有 RNP；

‹2› X 的每个有界子集是可凹集；

‹3› X 的每个有界子集是 σ可凹集。

定理 0.34 X 的共轭空间 X^* 的可分性蕴涵 X^* 具有 RNP。

定义 0.46 X 称具有 Krein-Milman 性质（KMP）乃指对任何有界闭凸集 K，$K=\overline{\text{cov}}\ (\text{ext}(K))$。

定义 0.47 称赋范空间 Y 在赋范空间 X 中有有限表示（或称 X 模写 Y）乃指 Y 的每个有限维子空间 Y_n 和 $\lambda>1$，存在 X 中有限维子空间 X_n 以及 $Y_n\to X_n$ 的满线性同胚 T，$\frac{1}{\lambda}\|y\|\leqslant\|Ty\|\leqslant\lambda\|y\|\ (y\in Y_n)$。

定义 0.48 X 称为具有超 A 性质乃指任何在 X 中有有限表示的 Y 具有 A 性质。例如 X 称为超自反的指任何在 X 中有有限表示

的Y是自反的.

定理 0.35 下述说法等价

‹1› X 超自反;

‹2› X 有等价一致凸范数;

‹3› X 有等价的一致光滑范数;

‹4› X 有等价的一致凸且一致光滑范数;

‹5› X有超 BSP;

‹6› X 有超 RNP;

‹7› X 有超 KMP .

定理 0.36 诸空间性质之间有蕴涵关系（见图 3）

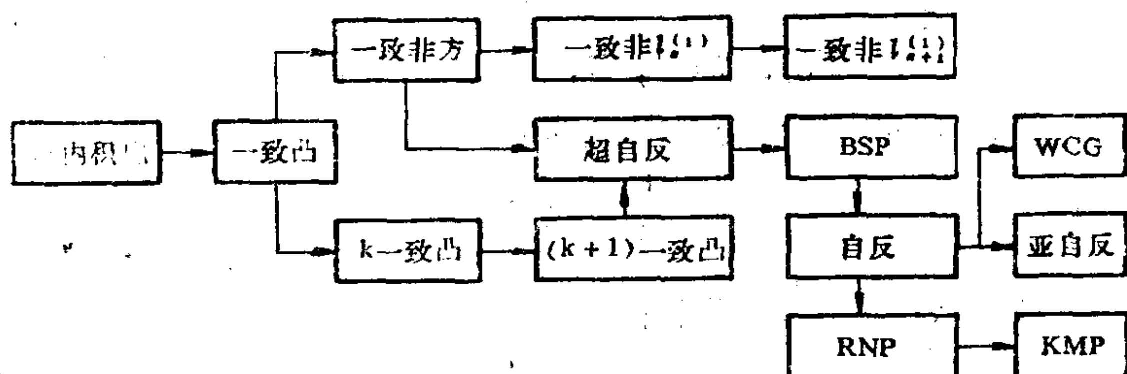


图 3

§ 5 几何常数

围线长

考虑单位球面上中心对称的、闭的、可求长曲线 c, 即 $c=\{g^S\in S(X):0\leqslant s\leqslant\lambda(c)\}$, g^S 满足

(i) g^S 是$[0,\ \lambda(c)]\to X$ 的连续、单射抽象函数;

(ii) $\|g^S\|=1(0\leqslant s\leqslant\lambda(c))$;

(iii) g^Sg^0 曲线段弧长是 $s(0\leqslant s\leqslant\lambda(c))$;

(iv) $g^{\frac{\lambda(c)}{2}+s}=-g^S\quad\left(0\leqslant s\leqslant\dfrac{\lambda(c)}{2}\right)$.

这样的曲线C 的全体记为 Γ.

定义 0.49 $U(X)$的围线长 $\operatorname{girth}U(X)=\inf\limits_{c\in\Gamma}\lambda(c)$.

定理 0.37 对任何 Banach 空间 $4 \leqslant \text{girth}U(X) \leqslant 8$.

定理 0.38 $\text{girth}U(X) > 4 \Leftrightarrow X$ 超自反.

定义 0.50 若 $\text{girth}\,U(X) = 4$ 且存在 $c \in \Gamma, \lambda(c) = 4$,称$X$是平坦的,或称为 $\text{girth}U(X) = 4$ 可达.

定理 0.39 X 平坦$\Rightarrow X^*$ 平坦.

定理 0.40 X 同构于平坦空间$\Rightarrow X$ 与 X^* 均不具有RNP.

定理 0.14 X 局部一致非方$\Rightarrow X$ 非平坦.

装球常数

定义 0.51 X 的装球常数

$$\Lambda_X = \sup\{r > 0: \exists \{x_i\} \overset{\infty}{\underset{i=1}{\subset}} X,\ \|x_i\| \leqslant 1 - r,\ \|x_i - x_j\| \geqslant 2r (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots, i \neq j)\}.$$

定理 0.42 若X 是无穷维 Banach 空间,则

$$\frac{1}{2} \geqslant \Lambda_X \geqslant \frac{1}{3}$$

证 若 $\Lambda_X > \frac{1}{2}$,则有 $r, \Lambda_X > r > \frac{1}{2}, \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$, $\|x_i\| \leqslant 1 - r < \frac{1}{2}$, $\|x_i - x_j\| \geqslant 2r > 1 (i, j = 1, 2, \cdots; i \neq j)$.取$i \neq j$,

$$\frac{1}{2} > \|x_i\| \geqslant \|x_i - x_j\| - \|x_j\| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

矛盾.

对任意给定的 $\varepsilon > 0$,记集族

$$D = \{A: A \subset U(X); x, y \in A \Rightarrow \|x - y\| > 1 - \varepsilon (x \neq y)\}$$

在集族D中,以包含关系为序,D 成半序集.D的任何全序子集 D_0 显然有上端 $\bigcup_{A' \in D_0} A'$. 由 Zorn 引理,D 有最大元 A_0 .

若 A_0 是有限集,则 $\text{span}A_0 \neq X$.存在 $x_0 \in X \backslash \text{span}\,A_0$,$x_0 \in U(X)$,$\text{dist}(x_0,\ \text{span}A_0) > 1 - \varepsilon$.这样一来$A_0 \cup \{x_0\} \in D$. 与A_0是最大元矛盾,故 A_0 是无限集.

令 $C = \frac{2}{3} A_0$,对任何 $x \in C$

$$\|x\| \leqslant \frac{2}{3} \leqslant 1 - \frac{1-\varepsilon}{3}.$$

又对 $x, y \in C$, $x \neq y$,

$$\|x - y\| \geqslant \frac{2}{3}(1-\varepsilon)$$

这表明 $\Lambda_X \geqslant \frac{1-\varepsilon}{3}$. 由 ε 的任意性, $\Lambda_X \geqslant \frac{1}{3}$.

定理 0.43 记 $d_X = \sup_{x} \inf_{n \neq m} \{\|x_n - x_m\| : x_n, x_m \in x\}$ 这里 x 是 $S(X)$ 上无穷点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 我们有

$$\Lambda_X = \frac{d_X}{2 + d_X}$$

证 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $S(X)$ 上点列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $i \neq j$ 时 $\|x_i - x_j\| > d_X - \varepsilon$. 令 $y_i = \left(1 - \frac{d_X - \varepsilon}{2 + d_X - \varepsilon}\right) x_i (i = 1, 2, \cdots)$. 则

$$\|y_i\| = 1 - \frac{d_X - \varepsilon}{2 + d_X - \varepsilon} (i = 1, 2, \cdots)$$

$$\|y_i - y_j\| > \left(1 - \frac{d_X - \varepsilon}{2 + d_X - \varepsilon}\right)(d_X - \varepsilon)$$

$$= \frac{2(d_X - \varepsilon)}{2 + d_X - \varepsilon} (i, j = 1, 2, \cdots, i \neq j)$$

这表明 $U(x)$ 中可容纳无穷多个半径为 $\frac{d_X - \varepsilon}{2 + d_X - \varepsilon}$ 的小球. 从而

$\Lambda_X \geqslant \frac{d_X - \varepsilon}{2 + d_X - \varepsilon}$. 鉴于 ε 的任意性,

$$\Lambda_X \geqslant \frac{d_X}{d_X + 2}$$

对任何 $\varepsilon > 0$, 取 s, $\frac{1}{3} \leqslant s < \Lambda_X$ 且 $\frac{2s}{1-s} > \frac{2\Lambda_X}{1 - \Lambda_X} - \varepsilon$ 以及 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|x_i\| \leqslant 1 - s$, $\|x_i - x_j\| \geqslant 2s (i, j = 1, 2, \cdots; i \neq j)$.

在以 $x_i (i = 1, 2, \cdots)$ 为球心, 以 s 为半径的球族中 至多有

一个包含空间0元，将这个球心x_{i_0}去掉，余者仍记为$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，则有

$$s\leqslant\|x_i\|\leqslant 1-s \quad (i=1,\ 2,\ \cdots) \tag{1}$$

$$\|x_i-x_j\|\geqslant 2s(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots;i\neq j) \tag{2}$$

由于 $s\geqslant\frac{1}{3}$立即得

$$\|x_i\|\leqslant\frac{2}{3}\leqslant\|x_i-x_j\|(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots;i\neq j) \tag{3}$$

对任给的 x_j，取 t，$0\leqslant t<1$ 满足

$$x_j=(1-t)(1-s)\frac{x_j}{\|x_j\|}$$

则对 x_i，$i\neq j$，$x_i-x_j=tx_i+(1-t)\left(x_i-\frac{1-s}{\|x_j\|}x_j\right)$。于是

$$t\|x_i-x_j\|+(1-t)\|x_i-x_j\|=\|x_i-x_j\|\leqslant t\|x_i\|+$$
$$(1-t)\|x_i-\frac{1-s}{\|x_j\|}x_j\|$$

联系（3）得$(1-t)\|x_i-x_j\|\leqslant(1-t)\|x_i-\frac{1-s}{\|x_j\|}x_j\|$。即

$$2s\leqslant\|x_i-x_j\|\leqslant\|x_i-\frac{1-s}{\|x_j\|}x_j\| \tag{4}$$

取 t'，$0\leqslant t'<1$ 使 $x_i=(1-t')(1-s)\frac{x_i}{\|x_i\|}$。从而

$$\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-x_i=\frac{t'(1-s)x_j}{\|x_j\|}+(1-t')\left(\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-\frac{(1-s)x_i}{\|x_i\|}\right)$$

$$t'\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-x_i\|+(1-t')\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-x_i\|=$$

$$\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-x_i\|\leqslant t'\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}\|+(1-t')\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-\frac{(1-s)x_i}{\|x_i\|}\|$$

联系（4）及 $s\geqslant\frac{1}{3}$ 有$\|x_i-\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}\|\geqslant 2s\geqslant 1-s=$

$\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}\|$，故由上式得$\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-x_i\|\leqslant\|\frac{(1-s)x_j}{\|x_j\|}-\frac{(1-s)}{\|x_i\|}x_i\|$。因而有

$$\|\frac{x_j}{\|x_j\|}-\frac{x_i}{\|x_i\|}\|\geqslant\frac{2s}{1-s}(i\neq j)$$

联系 d_X 定义立即得 $d_X\geqslant\frac{2s}{1-s}$。令$s\to\Lambda_X$ 则得$d_X\geqslant\frac{2\Lambda_X}{1-\Lambda_X}$即 $\Lambda_X\leqslant\frac{d_X}{d_X+2}$。

参 考 文 献

〔1〕 J. Diestel, 《Geometry of Banach Spaces-Selected Topics》, Lect. Notes Math., Springer-Verlag, 485* (1975) .

〔2〕 J.Lindenstrauss,L.Tzafriri, 《Classical Banach Spaces I》, Springer-Verlag (1977) .

〔3〕 J.J.Schäffer, 《Geometry of Spheres in Normed Spaces》 ,Marcel Dakker, inc.New York and Basel (1976).

〔4〕 俞鑫泰, 《Banach 空间几何理论》, 华东师范大学出版社 (1986) .

〔5〕 C.A. Kottman, Packing and Reflexivity in Banach Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 150 (1970) , 565—576.

〔6〕 R.C.James, Uniformly Non-Square Banach Spaces, Ann.Math., (2) 80 (1964),542—550.

第一章　Orlicz 空间

众所周知，定义在某可测集G上的实值L^p空间（$p>1$）的元素全体系指集合

$$\left\{x(t):\int_G M(x(t))dt<\infty\right\}$$

其中 $M(u)=|u|^p$，$u\in(-\infty,\ +\infty)$．如果$M(u)$是较为一般的实值函数，上述集合就是 L^p 空间的一种推广．本章首先讨论具有某些特定性质的实值函数——N函数的一些基本性质，然后介绍由这类函数依上述方式得到的集合的线性包所构成的Banach 空间，即Orlicz 空间．

§1　N 函 数

1．**凸函数**　我们只对定义在$(-\infty,+\infty)$上的，在零点为零的实值连续偶函数有兴趣，所以下面提到的所有函数$M(u)$都假定具有上述性质．

定义 1.1　函数$M(u)$称为凸的是指不等式

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\frac{M(u)+M(v)}{2} \tag{1.1}$$

对一切u，v成立．如果不等式（1.1）对所有不同的u,v还不取等号，就说$M(u)$是严格凸的．

$M(u)$是凸函数的几何意义是连结其图形上任何两点的弦均位于该图形的上方；而$M(u)$严格凸则表示其图形上还不含直线段（见图 4）．

比严格凸更强的一种凸性是一致凸．我们称$M(u)$是一致凸的，如果对任意给定的$\varepsilon>0$和$u_0>0$，存在$\delta>0$，使得对一

切 u, v, 只要

$$|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,\ |v|)\geqslant\varepsilon u_o$$

就有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2} \tag{1.2}$$

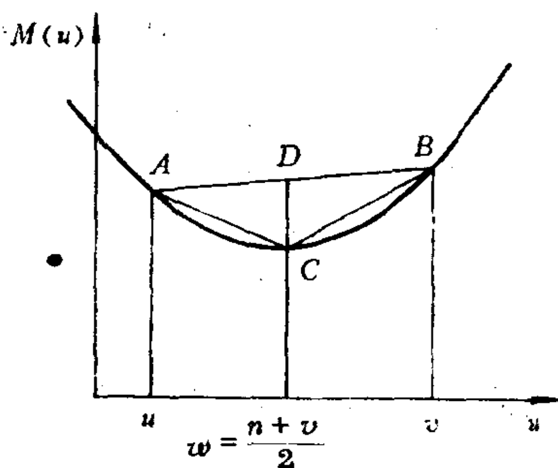


图 4

显然，$M(u)$一致凸$\Rightarrow M(u)$严格凸$\Rightarrow M(u)$凸。

上述定义还可叙述如下

(1) $M(u)$是凸的$\Leftrightarrow\forall u$, v 及 $a\in[0,1]$,

$$M(au+(1-a)v)\leqslant aM(u)+(1-a)M(v) \tag{1.1'}$$

(2) $M(u)$是凸的$\Leftrightarrow\forall u_1,\ u_2,\cdots,u_n$,

$$M\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)\leqslant\frac{M(u_1)+M(u_2)+\cdots+M(u_n)}{n} \tag{1.1''}$$

(3) $M(u)$严格凸$\Leftrightarrow\forall u\neq v$ 及 $a\in(0,\ 1)$, 不等式(1.1′)不取等号.

(4) $M(u)$一致凸$\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon'>0$, $u_o'>0$ 及$[a,\ b]\subset(0,1)$, 存在 $\delta'>0$, 使得对一切 u, v 及 $a\in[a,\ b]$, 只要

$$|u-v|\geqslant\varepsilon'\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon'u_o'$$

就有

$$M(au+(1-a)v)\leqslant(1-\delta')[aM(u)+(1-a)M(v)] \tag{1.2'}$$

我们只证明 (2) 和 (4)，因为 (1) 和 (3) 可由图 4 直接

看出．先证(2)．首先，对于一切形如 2^k 的n（k 为自然数），只要连续k次使用（1.1），就能得到（1.1″）．对于一般的n，取自然数 m和k使得 $n+m=2^k$，则对任何实数u^*，由已得结果

$$M\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n+mu^*}{m+n}\right)$$

$$\leqslant\frac{M(u_1)+M(u_2)+\cdots+M(u_n)+mM(u^*)}{m+n}$$

取$u^*=\frac{1}{n}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$，上式即

$$M\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{n}M(u_i)+mM\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}\right)\right]$$

整理此式，可得（1.1″）．

现在证明（4）．在（1.2′）中取 $\alpha=\frac{1}{2}$便得到（4）的充分性．今证（4）的必要性．$\forall\varepsilon'>0,u_o'>0$ 和 $[a,b]\subset(0,1)$ 取 $c>0$，使得 $0\leqslant a-c<b+c\leqslant1$．对于 $\varepsilon=2c\varepsilon',u_o=c\varepsilon'u_o'$，取定（1.2）中的 $\delta>0$．于是对任何 $\alpha\in[a,b]$及 u,v 满足$|u-v|\geqslant\varepsilon'\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon'u_o'$，令

$$u^*=(\alpha-c)u+(1-\alpha+c)v$$

$$v^*=(\alpha+c)u+(1-\alpha-c)v$$

则容易看出 $\alpha\pm c\in[0,1]$，u^*，v^*介于 u，v 之间且
$|u^*-v^*|=2c|u-v|\geqslant2c\varepsilon'\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon\max(|u^*|,|v^*|)$
此外，由

$$|u^*-v^*|\geqslant2c\varepsilon'\max(|u|,|v|)\geqslant2c\varepsilon'u_o'=2u_o$$

还可知 $\max(|u^*|,|v^*|)\geqslant u_o$．于是对 u^*，v^* 应用（1.2），得

$$M(\alpha u+(1-\alpha)v)=M\left(\frac{u^*+v^*}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u^*)+M(v^*)}{2}$$

$$=\frac{1-\delta}{2}[M((a-c)u+(1-a+c)v)+M((a+c)u+(1-a-c)v)]$$

$$\leqslant\frac{1-\delta}{2}[(a-c)M(u)+(1-a+c)M(v)+(a+c)M(u)$$

$$+(1-a-c)M(v)]$$

$$=(1-\delta)[aM(u)+(1-a)M(v)]$$

取$\delta'=\delta$，得（1.2'）.

我们已经知道，$M(u)$一致凸$\Rightarrow M(u)$严格凸$\Rightarrow M(u)$凸.反之，我们有

定理 1.1 $M(u)$严格凸时在任何有界闭区间上一致凸.

证 对任何 $\varepsilon>0$，$u_0>0$ 及有界闭区间I，由于$M(u)$在I上严格凸，故函数

$$f(u,v)=M\left(\frac{u+v}{2}\right)\bigg/\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

在紧集

$$\{(u,v):|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon u_0;u,v\in I\}$$

上最大值小于1.

类似可证

定理 1.2 $M(u)$严格凸时对任给$K>0$和$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得对一切u，v，只要$|u|\leqslant K$，$|v|\leqslant K$，$|u-v|\geqslant\varepsilon$，就有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

定理 1.3 $M(u)$严格凸时对任给$K>0,\varepsilon>0$和$[a,b]\subset(0,1)$，存在$\delta>0$，使得$a\in[a,b]$，$|u|\leqslant K$，$|v|\leqslant K$，$|u-v|\geqslant\varepsilon$时成立

$$M(au+(1-a)v)\leqslant(1-\delta)[aM(u)+(1-a)M(v)]$$

2. N 函数

定义 1.2 满足下述条件的在$(-\infty,+\infty)$上的实值函数$M(u)$称为N函数：

(1) $M(u)$为偶的连续凸函数，且$M(0)=0$；

(2) $u \neq 0$ 时 $M(u)>0$;

(3) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$; $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$.

定理 1.4 $M(u)$为N函数的充要条件是存在满足下列条件的$[0, +\infty)$上的实值函数$p(u)$:

(1) $p(u)$ 右连续，非降;

(2) $u>0$ 时 $p(u)>0$;

(3) $p(0)=0$, $p(\infty)=\infty$ 并且满足

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt \tag{1.3}$$

证 $M(u)$ 凸时由图 4 中线段 AC, AB 和 CB 的斜率间的关系易见对任何 $u<w<v$, 有

$$\frac{M(w)-M(u)}{w-u}\leqslant\frac{M(v)-M(u)}{v-u}\leqslant\frac{M(v)-M(w)}{v-w} \tag{1.4}$$

对于任何 $h_2>h_1>0$, 令 $v=u+h_2$, $w=u+h_1$, 由 (1.4) 的第一个不等式

$$\frac{M(u+h_1)-M(u)}{h_1}\leqslant\frac{M(u+h_2)-M(u)}{h_2}$$

故函数$\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$关于$h>0$非减. 同理$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}$关于 $h>0$ 非增.因此 $M(u)$ 的右导数 $p(u)$及左导数 $p_-(u)$对于一切u都是存在的，再由 (1.4) 的第一个不等式

$$\frac{M(u)-M(u-h)}{h}\leqslant\frac{M(u+h)-M(u)}{h}$$

令$h\to 0^+$, 便得 $p_-(u)\leqslant p(u)$. 今证 $p(u)$右连续，非降.

设 $u<v$. 取 $h>0$ 使 $u+h<v-h$. 对于 $u,u+h$, $v-h$ 和 $u+h$, $v-h$, v 分别使用 (1.4), 得

$$\frac{M(u+h)-M(u)}{h}\leqslant\frac{M(v-h)-M(u+h)}{(v-h)-(u+h)}\leqslant\frac{M(v)-M(v-h)}{h}$$

令 $h\to 0$，便知$p(u)\leqslant p_{-}(v)\leqslant p(v)$，即 $p(u)$非降．

由 $\dfrac{M(u+h)-M(u)}{h}$ 的非减性，显然对任意 u_o和 $h>0$

$$p(u_o+0)\leqslant \frac{M(u_0+h)-M(u_o)}{h}$$

命 $h\to 0^+$，得 $p(u_o+0)\leqslant p(u_o)$．另一方面，由于 $p(u)$ 非减，故 $p(u_o+0)\geqslant p(u_o)$，因而 $p(u_o+0)=p(u_0)$，即 $p(u)$右连续．

据实函数熟知的定理可知（1.3）成立．再由 $p(t)$ 非减知 $u\geqslant 0$ 时（注意 $M(0)=0$）

$$M(u)=\int_0^u p(t)dt\leqslant up(u)$$

因此

$$M(2u)=\int_0^{2u} p(t)dt\geqslant\int_u^{2u} p(t)dt\geqslant up(u)\geqslant M(u)$$

由此可见

$$\frac{1}{2}p\left(\frac{u}{2}\right)\leqslant\frac{M(u)}{u}\leqslant p(u)\quad (u>0)\qquad (1.5)$$

最后由公式（1.5）及定义（1.2）的（2），（3）可知定理 1.4 的（2），（3）成立．至此，定理 1.4 的必要性完全获证．

反之，由公式（1.3）及定理 1.4 的（1），对任意 u，v，不妨设 $0\leqslant u\leqslant v$，有

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)=\int_0^{\frac{u+v}{2}} p(t)dt\leqslant\int_0^u p(t)dt+\frac{1}{2}\left[\int_u^{\frac{u+v}{2}} p(t)dt+\int_{\frac{u+v}{2}}^v p(t)dt\right]$$

$$=\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

故 $M(u)$ 是凸的.联系公式(1.5)，可得定义 1.2的(1)，(2)，(3).

注 由 $M(u)$ 的凸性及定义 1.2 的 (3) 容易得到 $\forall\ u\neq 0$ 有

$$M(\alpha u)<\alpha M(u) \quad (0<\alpha<1) \tag{1.6}$$

$$M(\alpha u)>\alpha M(u) \quad (\alpha>1) \tag{1.7}$$

事实上，若存在 $u_o\neq 0$ 及 $\alpha_o\in(0,\ 1)$ 使 $M(\alpha_o u_o)=\alpha_o M(u_o)$，那么将此式改写成

$$M(\alpha_o u_o+(1-\alpha_o)0)=\alpha_o M(u_o)+(1-\alpha_o)M(0)$$

并记 $u=0$，$v=|u_o|$，$w=\alpha_o u_o$，由图 1 便知 $M(u)$ 在区间$[0,|u_o|]$ 上必为线性：$M(u)=au\ (a>0)$. 这就与定义 1.2 的 (3) 的 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{M(u)}{u}=0$ 相悖了.

对于 $\alpha>1$，令 $\alpha'=\dfrac{1}{\alpha}$，$u'=\alpha u$，由 (1.6) 有 $M(\alpha' u')<\alpha' M(u')$，即公式 (1.7) 成立.

利用公式 (1.6) 还可知函数 $\dfrac{M(u)}{u}$ 在 $u>0$ 时是严格增加的. 事实上，对任何 $u>v>0$，取 $\alpha=\dfrac{v}{u}$，则由 (1.6) 式，有 $M(\alpha u)<\alpha M(u)$或

$$\frac{M(v)}{v}<\frac{M(u)}{u} \quad (u>v>0) \tag{1.8}$$

定义 1.3 $p(t)$ 满足定理1.4的 (1)，(2)，(3) 时称

$$q(s)=\sup_{p(t)\leqslant s} t=\inf_{p(t)>s} t \tag{1.9}$$

为 $p(t)$的右反函数.

注 由 $p(t)$ 的单调性，(1.9) 的后一等式是明显的.

定理 1.5 $p(t)$的右反函数 $q(s)$也满足定理 1.4 中的(1)，(2)，(3).

证 (1) 显然 $q(s)$ 非减。今证它右连续。如若不然，有 $s_n \downarrow s_0$ 使 $q(s_n) \downarrow t_0 > q(s_0)$。取 t_1 满足 $t_0 > t_1 > q(s_0)$，则 $t_1 < q(s_n) = \sup\limits_{p(t) \leqslant s_n} t$，故 $p(t_1) \leqslant s_n (n=1, 2, \cdots)$。于是 $p(t_1) \leqslant s_0$，从而 $t_1 \leqslant \sup\limits_{p(t) \leqslant s_0} t = q(s_0)$，矛盾。

若 (2) 不真，则有 $s_0 > 0$ 使 $q(s_0) = 0$，从而存在 $t_n \downarrow 0$ 且 $p(t_n) > s_0 (n=1, 2, \cdots)$。但 $p(t)$ 右连续，故有 $p(t_n) \to p(0) = 0$。于是有 $n_0 \geqslant 1$ 使 $n > n_0$ 时 $p(t_n) \leqslant s_0$，矛盾。

(3) 显然。

定义 1.4 设 $M(u)$ 为N函数，$q(s)$ 为其右导数 $p(t)$ 的右反函数，则称 N函数

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s) ds$$

为 $M(u)$ 的余函数。

$M(u)$，$N(v)$，$p(t)$，$q(s)$ 之间的关系如图 5 所示。

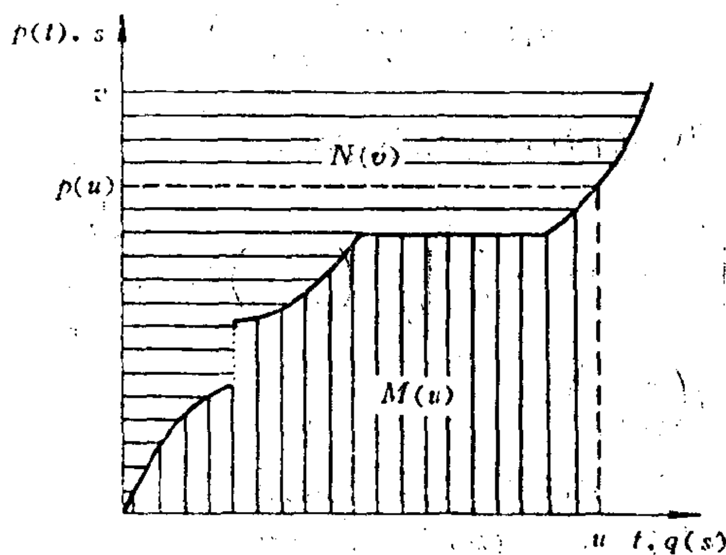


图 5

由图 5 可以看出，$M(u)$ 严格凸当且仅当 $q(s)$ 连续，即 $p(u)$ 严格增加。还有对任何 u，v

$$uv \leqslant M(u) + N(v) \quad \text{(Young 不等式)} \tag{1.10}$$

且 (1.10) 成为等式的充要条件是 $u = q(|v|)\operatorname{sign} v$ 或者 $v =$

$p(|u|)\text{sign }u$，亦即成立

$$\begin{cases} |u|p(|u|)=M(u)+N[p(|u|)] \\ |v|q(|v|)=M[q(|v|)]+N(v) \end{cases} \tag{1.11}$$

由图5还可知，$q(s)$为$p(t)$的右反函数时，$p(t)$也是$q(s)$的右反函数，因此 $M(u)$ 与 $N(v)$是互余 N函数。

有时我们需要考虑形如 $aM(bu)$形的 N函数。

定理 1.6 $M(u)$为N 函数时

$$M_1(u)=aM(bu)\quad (a,b>0)$$

也是 N函数且它的余函数是

$$N_1(v)=aN\left(\frac{1}{ab}v\right) \tag{1.12}$$

其中 $N(v)$是 $M(u)$的余函数。

证 只须验证 (1.12)．事实上，$M_1(u)$ 的右导数 $p_1(t)=abp(bt)$，其中 $p(t)$是 $M(u)$的右导数。因此 $p_1(t)$的右反函数是

$$q_1(s)=\frac{1}{b}q\left(\frac{1}{ab}s\right)$$

其中 $q(s)$ 是 $p(t)$ 的右反函数。从而

$$N_1(v)=\int_0^{|v|}q_1(s)ds=\frac{1}{b}\int_0^{|v|}q\left(\frac{1}{ab}s\right)ds=a\int_0^{\frac{1}{ab}|v|}q(s)ds=$$

$$=aN\left(\frac{1}{ab}v\right)$$

定理 1.7 设两个N函数满足关系式

$$M_1(u)\leqslant M_2(u)\qquad (u\geqslant u_o\geqslant 0)$$

那么它们相应的余函数有关系

$$N_1(v)\geqslant N_2(v)\qquad (q_2(v)\geqslant u_o)$$

证 由 (1.10)，(1.11)，$v>0$ 时

$$M_2(q_2(v))+N_2(v)=q_2(v)\cdot v\leqslant M_1(q_2(v))+N_1(v)$$

联系条件 $M_2(q_2(v))\geqslant M_1(q_2(v))\quad (q_2(v)\geqslant u_o)$，得

$$N_2(v) \leqslant N_1(v) \qquad (q_2(v) \geqslant u_0)$$

定义 1.5 我们称 N函数 $M_2(u)$快于 $M_1(u)$，假如存在 a，$b>0$ 和 $u_0 \geqslant 0$ 使得

$$M_1(u) \leqslant aM_2(bu) \quad (u \geqslant u_0)$$

若 $M_2(u)$快于 $M_1(u)$且 $M_1(u)$快于 $M_2(u)$，就说 $M_1(u)$ 与 $M_2(u)$等价.

根据定理1.6和定理 1.7，$M_2(u)$快于 $M_1(u)$时它们相应的余函数 $N_1(v)$快于 $N_2(v)$，因而可知 $M_2(u)$与 $M_1(u)$ 等价时，$N_2(v)$与 $N_1(v)$等价.

例 1.1 $M_1(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^\alpha \ (\alpha>1)$.

此时 $p_1(t) = t^{\alpha-1}$，$q_1(s) = s^{\beta-1}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\right)$，故

$$N_1(v) = \frac{1}{\beta}|v|^\beta$$

例 1.2 $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$.

此时 $p_2(t) = e^t - 1$，$q_2(s) = \ln(s+1)$，故

$$N_2(v) = (1+|v|)\ln(1+|v|) - |v|.$$

3. Δ_2 **条件**

定义 1.16 N 函数 $M(u)$满足 Δ_2 条件是指存在 $K>2$ 和 $u_0 \geqslant 0$ 使得

$$M(2u) \leqslant KM(u) \quad (u \geqslant u_0) \tag{1.13}$$

我们总用$M(u) \in \Delta_2$ 表示 $M(u)$满足 Δ_2 条件；用 $M(u) \in \nabla_2$ 表示它的余函数 $N(v) \in \Delta_2$；用 $M(u) \in \Delta_2 \cap \nabla_2$ 表示 $M(u) \in \Delta_2$ 且 $M(u) \in \nabla_2$.

Δ_2 条件在 Orlicz 空间理论中具有重要意义. 为应用方便，我们给出它的几个等价命题.

定理 1.8 下列说法等价

(1) $M(u) \in \Delta_2$

(2) $\forall l_1>1$, $u_1>0$, $\exists K'>1$使得

$$M(l_1u)\leqslant K'M(u)\quad (u\geqslant u_1) \tag{1.14}$$

(3) $\forall l_2>1$, $u_2>0$, $\exists \varepsilon\in(0,1)$ 使得

$$M((1+\varepsilon)u)\leqslant l_2M(u)\quad (u\geqslant u_2) \tag{1.15}$$

(4) $\forall l_3>1$, $v_o>0$, $\exists \delta>0$使得

$$N(l_3v)\geqslant(l_3+\delta)N(v)\quad (v\geqslant v_o) \tag{1.16}$$

(5) $\exists v_0>0$, $l_3>1$, $\delta>0$ 使得 (1.16) 式成立,

(6) $\exists v_o>0$, $P_o>1$, $l_4>1$使得

$$\frac{1}{P_ol_4}N(l_4v)\geqslant N(v)\quad (v\geqslant v_0) \tag{1.17}$$

证 (1) ⇒ (2) 对任给$l_1>1$, 取自然数a使得$2^a\geqslant l_1$. 对 $u\geqslant u_o$ 连续a次使用 (1.13), 得

$$M(l_1u)\leqslant M(2^au)\leqslant K^aM(u)\quad (u\geqslant u_o)$$

若 $u_1\geqslant u_o$, 则取 $K'=K^a$ 即得 (1.14). 如若 $u_1<u_0$, 则注意$M(l_1u)/M(u)$在$[u_1, u_0]$上是u的连续函数, 可知它必有最大值 K_0. 取 $K'=\max(K^a, K_0)$ 即得 (1.14).

(2) ⇒ (3) 对 $l_2>1$ 和 $u_2>0$, 由 (2), 存在 $K'>l_2$ 使得 $M(2u)\leqslant K'M(u)(u\geqslant u_2)$. 命 $\varepsilon=\dfrac{l_2-1}{K'-1}$, 则 $\varepsilon\in(0,1)$. 再由$M(u)$的凸性, $u\geqslant u_2$ 时有

$$M((1+\varepsilon)u)=M((1-\varepsilon)u+2\varepsilon u)\leqslant(1-\varepsilon)M(u)+\varepsilon M(2u)$$
$$\leqslant(1-\varepsilon)M(u)+\varepsilon K'M(u)=l_2M(u)$$

(3) ⇒ (4) 对 $l_3>1$ 和$v_0>0$, 取 $u_2>0$ 使得$q(v_0)\geqslant u_2$. 由定理1.6和定理1.7, 及 (1.15) 式蕴涵

$$N(v)\leqslant\frac{1}{l_3}N\left(\frac{l_3}{1+\varepsilon}v\right)\qquad (v\geqslant v_0)$$

于是得

$$l_3N(v)\leqslant N\left(\frac{l_3}{1+\varepsilon}v\right)\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}N(l_3v)\quad (v\geqslant v_0)$$

命 $\delta=l_3\varepsilon$, 即得 (1.16).

(4) ⇒ (5) 显然.

(5) ⇒ (6) 对 $v_0>0$, $P_0>1$, 取好(1.16) 中的 l_3, δ.选自然数 k使$\left(1+\frac{\delta}{l_3}\right)^k\geq P_0$. 由 (1.16) 式, 当 $v\geq v_0$ 时

$$N(l_3^k v)\geq(l_3+\delta)^k N(v)=l_3^k\left(1+\frac{\delta}{l_3}\right)^k N(v)\geq l_3^k P_0 N(v)$$

取 $l_4=l_3^k$ 即得 (1.17) .

(6) ⇒ (1) 选自然数β使 $P_0{}^\beta\geq 2$, 取 $u_0>0$使得$p(u_0)\geq v_0$, 再命 $K=P_0{}^\beta l_4^\beta$. 据 (1.17) 式和定理 1.6, 定理 1.7, 当 $u\geq u_0$ 时 $M(u)\geq\frac{1}{P_0 l_4}M(P_0 u)$,故$M(2u)\leq M(P_0{}^\beta u)\leq P_0{}^\beta l_4^\beta M(u)$

$=KM(u)\quad(u\geq u_0)$.

由定理 1.8 的 (2) 立即推出

定理 1.9 若 $M_2(u)$等价于 $M_1(u)$, 则 $M_2(u)\in\Delta_2$ 时$M_1(u)\in\Delta_2$.

在 Orlicz 空间几何理论中, $M(u)$ 的凸性与空间的凸性有着密切联系. 一般 $p(t)$不严格单调时, $M(u)$不具有严格凸性, 当然更不是一致凸的.尽管如此,我们仍有下面的几个结果.

定理 1.10 对任何 N函数 $M(u)$及$\varepsilon>0$, 存在严格凸的 N函数 $M_1(u)$满足

$$M(u)\leq M_1(u)\leq(1+\varepsilon)M(u)$$

证 由 $p(t)$右连续及 $p(\infty)=\infty$ 可知使 $p(t)$ 为常数的区间必呈$[a, b)$形.设其全体为$\{[a_k, b_k)\}_{k=1}^\infty$. 若 $p(b_1)>p(a_1)$,则命 $b_1'=b_1$, $\beta_1=\min(p(b_1), (1+\varepsilon)p(a_1))$; 若 $p(b_1)=p(a_1)$, 则 $p(t)$在 b_1 点连续, 此时选 $b_1'>b_1$ 使 $p(b_1')<(1+\varepsilon)p(a_1)$, 并命 $\beta=p_1(b_1')$.然后在$[a_1, b_1')$上定义 $p_1(t)$为通过平面上两点 $(a_1, p(a_1))$ 和 (b_1', β_1) 的直线段. 易见 $p_1(t)$ 严格增且 $p(t)\leq p_1(t)\leq(1+\varepsilon)p(t)$, $[t\in[a_1, b_1')]$. 再取 $\{[a_k, b_k)\}$中第一个不含于$[a_1, b_1')$ 半开线节并用同样的方法在其上补充定义 $p_1(t)$, ……. 最后在其余的点上定义 $p_1(t)=p(t)$. 容易

看出 $p_1(t)$ 严格增加且满足 $p(t)\leqslant p_1(t\leqslant(1+\varepsilon)p(t)(t\in[0,\infty))$。令 $M_1(u)=\int_0^{|u|}p_1(t)dt$，则可以验明它满足定理要求。

定理 1.11 $M(u)\in\Delta_2$ 时存在与 $M(u)$ 等价的严格凸 N 函数 $M_1(u)$，且其余函数也严格凸。

证 不妨假定 (1.13) 式对一切 u 成立（否则可修改 $p(t)$ 在 $[0,u_0]$ 上的定义，例如令它在 $[0,u_0]$ 上线性，使修改后的 $M(u)$ 在 $[0,u_0]$ 上满足 (1.13) 式，而修改后的 $M(u)$ 显然与原来的 N 函数等价）。令命 $M_1(u)=\int_0^{|u|}\frac{M(t)}{t}dt$，因 $\frac{M(t)}{t}(t>0)$ 严格增且连续，所以 $M_1(u)$ 与其余函数都严格凸，今证它与 $M(u)$ 等价，事实上，由式 (1.5) 有

$$p(u)\geqslant\frac{M(u)}{u}\geqslant\frac{\frac{1}{K}M(2u)}{u}\geqslant\frac{1}{K}p(u)\quad(u>0)$$

将此式各项由零到 u 积分，得 $M(u)\geqslant M_1(u)\geqslant\frac{1}{K}\widetilde{M}(u)$，即知 $M_1(u)$ 与 $M(u)$ 等价。

以下讨论 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$ 情形。先证明一个引理。

引理 1.1 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ $K>1$ 使得

$$p((1+\varepsilon)t)\geqslant Kp(t)\quad(t\geqslant0)$$

则 $M(u)$ 一致凸。

证 对于给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，取 $K>1$ 使

$$p\left(\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\geqslant Kp(t)\quad(t\geqslant0)$$

任取 u，v 满足 $|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,|v|)$，不失一般性，设 $u-v\geqslant\varepsilon u>\varepsilon v>0$，即 $(1-\varepsilon)u\geqslant v>0$。记

$$\varphi(t)=M(u)+M(t)-2M\left(\frac{u+t}{2}\right)\quad(t\geqslant0)$$

由于几乎处处有

$$\varphi'(t)=M'(t)-M'\left(\frac{u+t}{2}\right)\leqslant 0 \quad (0\leqslant t\leqslant u)$$

故 $\varphi(t)$于$[0, u]$上非增，因而

$$\varphi(v)\geqslant M(u)+M((1-\varepsilon)u)-2M\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u\right)$$

$$=\int_{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u}^{u} p(t)dt-\int_{(1-\varepsilon)u}^{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u} p(t)dt=$$

$$=\int_{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u}^{u}\left[p(t)-p\left(t-\frac{\varepsilon}{2}u\right)\right]dt$$

$$\geqslant\int_{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}u\right)}^{u}\left[p(t)-p\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\right]$$

$$\geqslant\int_{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)u}^{u}\left(1-\frac{1}{K}\right)p(t)dt$$

$$\geqslant\left(1-\frac{1}{K}\right)\left[M(u)-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)M(u)\right]$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{K}\right)[M(u)+M(v)]$$

移项得

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left[1-\frac{\varepsilon}{4}\left(1-\frac{1}{K}\right)\right](M(u)+M(v))$$

即 $M(u)$一致凸。

定理 1.12 若 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$,则存在与 $M(u)$ 等价的一致凸N 函数 $M_1(u)$，且它的余函数也一致凸。

证　同于定理 1.11 的证明，不妨设对一切 u 成立

$$(2+\delta)M(u)\leqslant M(2u)\leqslant KM(u)\quad (K>2,\ \delta>0)$$

令

$$M_0(u)=\int_0^{u}\frac{M(t)}{t}dt,\quad M_1(u)=\int_0^{u}\frac{M_0(t)}{t}dt$$

则由定理 1.11 的证明可知 $M_1(u)$ 与 $M(u)$ 等价. 因

$$K^{-1}M(u)\leqslant M\left(\frac{u}{2}\right)=\int_0^{\frac{u}{2}}\frac{M\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}}dt\leqslant\int_{\frac{u}{2}}^{u}\frac{M(t)}{t}dt\leqslant M_0(u)$$

$$=\int_0^{\frac{u}{2}}\frac{M(t)}{t}dt+\int_{\frac{u}{2}}^{u}\frac{M(t)}{t}dt\leqslant M\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{1}{2}M(u)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2+\delta}+\frac{1}{2}\right)M(u)\triangleq L^{-1}M(u)$$

$\left(L=\dfrac{4+2\delta}{4+\delta}>1\right)$，所以

$$L\leqslant\frac{M(t)}{M_0(t)}=\frac{tM_0'(t)}{M_0(t)}\leqslant K$$

将此式各项除以 t 再对 t 由 u 积分到 θu，得

$$\theta^L M_0(u)\leqslant M_0(\theta u)\leqslant\theta^K M_0(u)\qquad(\theta\geqslant 1)$$

对任给 $\varepsilon>0$，由上式，$M_1(u)$的右导数满足

$$p_1((1+\varepsilon)u)=\frac{M_0((1+\varepsilon)u)}{(1+\varepsilon)u}\geqslant\frac{(1+\varepsilon)^L M_0(u)}{(1+\varepsilon)u}$$

$$=(1+\varepsilon)^{L-1}\frac{M_0(u)}{u}=(1+\varepsilon)^{L-1}p_1(u)$$

这说明 $p_1(u)$ 满足引理 1.1 的条件，从而知 $M_1(u)$一致凸.

对于 $M_1(u)$ 的余函数 $N_1(v)$的右导数 $q_1(v)$，设

$$q_1((1+\varepsilon)v)=\alpha(v)q_1(v)\qquad(v\geqslant 0)$$

则易知 $\alpha(v)>1$. 命 $v=p_1(u)$，代入上式，

$$(1+\varepsilon)p_1(u)=p_1(\alpha(v)u)=\frac{M_0(\alpha(v)u)}{\alpha(v)u}\leqslant\frac{\alpha^K(v)M_0(u)}{\alpha(v)u}$$

$$=\alpha^{K-1}(v)p_1(u)$$

因而 $\alpha(v)\geqslant(1+\varepsilon)^{\frac{1}{K-1}}$. 于是由 $q_1((1+\varepsilon)v)\geqslant(1+\varepsilon)^{\frac{1}{K-1}}q_1(v)$ 得知$N_1(v)$一致凸.

§ 2 Orlicz 空间

1. L_M，$L_M{}^*$ 与 E_M 我们总用G表示n维欧氏空间E^n中有界正测度闭集，$M(u)$，$N(v)$ 表示一对互余 N 函数，$u(t)$，$v(t)$，$w(t)$，…表示定义在 G 上的 Lebesgue 可测实函数，并用$\rho_M(u)$表示 $u(t)$关于 $M(u)$的模$\int_G M(u(t))dt$.

再规定

$$L_M=\{u(t):\rho_M(u)<\infty\}$$
$$L_M{}^*=\{u(t):\exists\, a>0,\ \rho_M(au)<\infty\}$$
$$E_M=\{u(t):\forall a>0,\ \rho_M(au)<\infty\}$$

则显然

$$E_M\subset L_M\subset L_M{}^* \tag{1.18}$$

当 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$ 时，上述诸集合的关系为真包含. 这可由下面的例子看出.

例 1.3 若 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，由定理 1.8 之 (2)，存在$u_K{}'\uparrow\infty$使得

$$M\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)u_K{}'\right)>2^KM(u_K{}')\quad(K=1,2,\cdots)$$

不妨设$M(u_1{}')\geqslant\frac{\varepsilon}{\text{mes}G_0}$，其中 ε 是预先给定的正数，G_0是G的任一事先给定的正测度子集. 选 G_0 的一个互不相交子集列 $\{G_K\}$ 使得

$$M(u_K')\mathrm{mes}G_K=\frac{\varepsilon}{2^K}\qquad(K=1,\ 2,\ \cdots)$$

定义

$$u_n(t)=\sum_{K=n+1}^{\infty}u_K'\chi_{G_K}(t)\qquad(n=0,1,2,\cdots)\qquad(1.19)$$

其中 $\chi_E(t)$表示集合 E的特征函数，则 $\forall n\geqslant0$

$$\rho_M(u_n)=\int_G M(u_n(t))\,dt=\sum_{K=n+1}^{\infty}M(u_K')\mathrm{mes}G_K=\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

但对任何 $l>1$，取 n_0 充分大使 $1+\frac{1}{n_0}\leqslant l$，则$n\geqslant n_0$时

$$\begin{aligned}\rho_M(lu_n)&=\sum_{K=n+1}^{\infty}M(lu_K')\mathrm{mes}G_K\\&>\sum_{K=n+1}^{\infty}M\left(\left(1+\frac{1}{K}\right)u_K'\right)\mathrm{mes}G_K\\&>\sum_{K=n+1}^{\infty}2^KM(u_K')\mathrm{mes}\ G_K=\sum_{K=n+1}^{\infty}\varepsilon=\infty\end{aligned}$$

这说明对任何 $n\geqslant0$，$u_n\in L_M\backslash E_M$，$lu_n\in L_M^*\backslash L_M(l>1)$.

容易知道，依照函数通常的加法和数乘，L_M^* 和 E_M 均是线性集。而由例 1.3，L_M一般不是线性集。

定理 1.13 L_M 是线性集的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$.

证 由例 1.3，定理条件必要。定理的充分性由下面的定理即可导出。

定理 1.14 $M(u)\in\Delta_2$ 时 $E_M=L_M=L_M^*$.

证 对任何 $u\in L_M^*$，由 L_M^* 的定义，存在 $a>0$ 使得 $au\in L_M$。对任给 $k>0$，由定理1.8之（2），存在 $K>1$ 和 $u_0>0$ 使得$u\geqslant u_0$时 $M\left(\frac{k}{a}u\right)\leqslant KM(u)$.于是

$$\int_G M(ku(t))dt=\int_{G(|au(t)|\leqslant u_0)}M\left(\frac{k}{a}au(t)\right)dt$$

$$+\int_{G(|au(t)|>u_0)}M\left(\frac{k}{a}au(t)\right)dt\leqslant M\left(\frac{k}{a}u_0\right)\mathrm{mes}G$$

$$+K\int_G M(\alpha u(t))dt<\infty$$

这说明 $u\in E_M$，因而 $E_M\supset L_M^*$。

对于 L_M•中的元素，有相当于（1.1″）的所谓的Jensen不等式·

定理 1.15 若 $u(t)\in L_M$，则

$$M\left(\frac{1}{\text{mes}G}\int_G u(t)dt\right)\leqslant\frac{1}{\text{mes}G}\int_G M(u(t))dt \qquad (1.20)$$

证 先设 $u(t)$ 于 G 上连续且 $|u(t)|\leqslant K$ $(t\in G)$．因 $M(u)$ 于 $[0, K]$ 上一致连续，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使当 $|u_1-u_2|<\delta$ 时 $|M(u_1)-M(u_2)|<\varepsilon$。

又因 $u(t)$ 在 G 上一致连续，故可将 G 分割为两两不相交的有限个等测度集 G_1, G_2, …, G_n 使得对任意取定的 $t_i\in G_i$ 都有 $|u(t)-u(t_i)|<\delta(t\in G_i)(i=1, 2, \cdots, n)$．于是

$$\left|\frac{1}{\text{mes}G}\int_G u(t)dt-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u(t_i)\right|=\left|\frac{1}{\text{mes}G}\sum_{i=1}^n\int_{G_i}u(t)dt-\right.$$

$$\left.\frac{1}{\text{mes}G}\sum_{i=1}^n\int_{G_i}u(t_i)dt\right|\leqslant\frac{1}{\text{mes}G}\sum_{i=1}^n\int_{G_i}|u(t)-u(t_i)|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\text{mes}G}\cdot\delta\cdot\text{mes}G=\delta$$

结合（1.1″）

$$M\left(\frac{1}{\text{mes}G}\int_G u(t)dt\right)\leqslant M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u(t_i)\right)+\varepsilon$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(u(t_i))+\varepsilon \qquad (1.21)$$

又

$$\left|\frac{1}{\text{mes}G}\int_G M(u(t))dt-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(u(t_i))\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\text{mes}G}\sum_{i=1}^n\int_{G_i}[M(u(t))-M(u(t_i))]dt\right|<\varepsilon \qquad (1.22)$$

由（1.21），（1.22）得，

$$M\left(\frac{1}{\mathrm{mes}G}\int_G u(t)dt\right)<\frac{1}{\mathrm{mes}G}\int_G M(u(t))dt+2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，知此时（1.20）成立。

对于 L_M 中的一般元素 $u(t)$，由 Young 不等式（1.10），

$$\int_G |u(t)|dt\leqslant\int_G M(u(t))dt+N(1)\mathrm{mes}G<\infty$$

因而存在连续函数列$\{u_n(t)\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_G |u(t)-u_n(t)|dt=0$$

由于（1.20）对所有 $u_n(t)$成立，两边对 n 取极限即可得到（1.20）对于 $u(t)$也成立。

2. Orlicz 空间 $L_M{}^*$ 对任意 $u\in L_M{}^*$，定义

$$\|u\|_M=\sup_{\rho_N(v)\leq 1}\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|$$

我们验证 $\|\cdot\|_M$ 是 $L_M{}^*$ 上的范数．首先，$u\in L_M{}^*$ 时存在 $a>0$ 使得$\int_G M(au(t))dt<\infty$。由 Young 不等式，

$$\|u\|_M=\frac{1}{a}\sup_{\rho_N(v)\leq 1}\left|\int_G au(t)v(t)dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{a}\sup_{\rho_N(v)\leq 1}[\rho_M(au)+\rho_N(v)]=\frac{1}{a}[\rho_M(au)+1]<\infty$$

至于$\|\cdot\|_M$ 满足范数的三条公理则是显然的。

范数$\|\cdot\|_M$ 称为 Orlicz 范数。

今证$(L_M{}^*,\ \|\cdot\|_M)$是 Banach 空间。对 $L_M{}^*$ 中基本列$\{u_n\}$，由定义

$$\int_G |u_n(t)-u_m(t)||v(t)|dt\to 0\quad (n,m\to\infty)$$

对一切满足 $\rho_N(v)\leqslant 1$ 的 $v(t)$一致成立。由此可知$\{u_n(t)\}$度量收敛，从而有子列 $a\cdot e\cdot$收敛：

$$u_{n_k}(t)\xrightarrow{a\cdot e\cdot}u_0(t)\qquad(k\to\infty)$$

对任给 $\varepsilon>0$，k 充分大时

$$\int_G|u_{n_{k+p}}(t)-u_{n_k}(t)||v(t)|dt<\varepsilon\quad(p\geqslant1)$$

对所有满足 $\rho_N(v)\leqslant1$ 的 v 一致成立。令 $p\to\infty$，据 Fatou 引理，对所有 $v\in L_N^*$，$\rho_N(v)\leqslant1$ 一致地有

$$\int_G|u_0(t)-u_{n_k}(t)||v(t)|dt\leqslant\varepsilon\quad(k\geqslant k_0)$$

这说明$\|u_{n_k}-u_0\|_M\leqslant\varepsilon(k\geqslant k_0)$。再由 $\|u_{n_k}-u_m\|_M\to0(k,m\to\infty)$ 及 ε 的任意性，知 $\|u_n-u_0\|_M\to0(n\to\infty)$。至于$u\in L_M^*$是明显的。

定理 1.16 (1) $\infty>\rho_N(v)\geqslant1$ 时

$$\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|\leqslant\rho_N(v)\|u\|_M\quad(u\in L_M^*)\tag{1.23}$$

(2) $\|u\|_M\leqslant1$ 时$\int_G N[p(|u(t)|)]dt\leqslant1$

证 (1) 因$0<\dfrac{1}{\rho_N(v)}\leqslant1$，由 $N(au)\leqslant aN(u)\quad(0\leqslant a\leqslant1)$

$$\rho_N\left(\frac{v}{\rho_N(v)}\right)=\int_G N\left(\frac{1}{\rho_N(v)}v(t)\right)dt\leqslant\frac{1}{\rho_N(v)}\rho_N(v)=1$$

从而

$$\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|=\rho_N(v)\left|\int_G u(t)\frac{v(t)}{\rho_N(v)}dt\right|\leqslant\rho_N(v)\|u\|_M$$

(2) 令

$$u_n(t)=\begin{cases}u(t), & |u(t)|\leqslant n\\ 0, & |u(t)|>n\end{cases}$$

则$|u_n(t)|\uparrow|u(t)|$，故

$$\int_G N[p(|u(t)|)]dt = \lim_{n\to\infty}\int_G N[p(|u_n(t)|)]dt$$

若（2）不真，则有充分大的n_0使$\int_G N[p(|u_{n_0}(t)|)]dt > 1$. 由(1.11)和(1.23)有

$$\int_G N[p(|u_{n_0}(t)|)]dt < \int_G |u_{n_0}(t)|p(|u_{n_0}(t)|)dt$$

$$\leqslant \rho_N(p(|u_{n_0}(t)|))\|u_{n_0}\|_M \leqslant \int_G N[p(|u_{n_0}(t)|)]dt$$

这是矛盾的.

定理 1.17 $\|u\|_M \leqslant 1$ 时 $\rho_M(u) \leqslant \|u\|_M$.

证 由(1.11)式以及定理1.16之(2)

$$\rho_M(u) \leqslant \int_G |u(t)|p(|u(t)|)dt \leqslant \|u\|_M$$

例 1.4 特征函数 $\chi_E(t)$的范数.

设 $E\subset G$ 为一正测度集.任取 $v\in L_N$, $\rho_N(v)\leqslant 1$, 由Jensen不等式

$$N\left(\frac{1}{\text{mes}E}\left|\int_E v(t)dt\right|\right) \leqslant \frac{1}{\text{mes}E}\rho_N(v) \leqslant \frac{1}{\text{mes}E}$$

所以

$$\left|\int_E v(t)dt\right| \leqslant \text{mes}E \cdot N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}E}\right)$$

因此

$$\|\chi_E\|_M = \sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\left|\int_E v(t)dt\right| \leqslant \text{mes}E\cdot N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}E}\right)$$

又因为

$$\rho_N\left(N^{-1}\left(\frac{\chi_E}{\text{mes}E}\right)\right) = \int_G \frac{\chi_E(t)}{\text{mes}E}dt = 1$$

所以

$$\|\chi_E\|_M \geqslant \int_G N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}E}\right)\chi_E(t)dt = N^{-1}\left(\frac{1}{\text{mes}E}\right)\text{mes}E$$

于是得到

$$\|\chi_E\|_M = N^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{mes}E}\right)\mathrm{mes}E \tag{1.24}$$

由（1.24）还可以得到

$$\lim_{\mathrm{mes}E\to 0}\|\chi_E\|_M = \lim_{u\to\infty}\frac{N^{-1}(u)}{u} = \lim_{v\to\infty}\frac{v}{N(v)} = 0 \tag{1.25}$$

例 1.5 $M(u)=\frac{1}{p}|u|^p(p>1)$的 L_M^* 的范数$\|\cdot\|_M$.

任取 $u\in L_M^*$, $v\in L_N^*$, $\rho_N(v)\leqslant 1$, 由 Hölder 不等式得

$$\left|\int_G u(t)v(t)dt\right| \leqslant \|u\|_p\|v\|_q \leqslant q^{\frac{1}{q}}\|u\|_p$$

故 $\|u\|_M\leqslant q^{\frac{1}{q}}\|u\|_p$.

另一方面，令

$$v_0(t) = q^{\frac{1}{q}}\frac{1}{\|u\|_p^{p-1}}|u(t)|^{p-1}\mathrm{sign}u(t)$$

直接验算之可知$\rho_N(v_0) = \frac{1}{q}\int_G |v_0(t)|^q dt = 1$, 所以

$$\|u\|_M \geqslant \left|\int_G u(t)v_0(t)dt\right| = q^{\frac{1}{q}}\frac{1}{\|u\|_p^{p-1}}\int_G |u(t)|^p dt = q^{\frac{1}{q}}\|u\|_p$$

这说明$\|\cdot\|_M$ 与 $\|\cdot\|_p$ 相差一个常数因子$q^{\frac{1}{q}}$.

定理 1.18 (1) L_M^* 中按模有界点集按范数有界；(2) $M(u)\in\Delta_2$ 时按范数有界集按模有界.

证 (1) $u\in L_M$, $\rho_N(v)\leqslant 1$ 时

$$\left|\int_G u(t)v(t)dt\right| \leqslant \rho_M(u)+\rho_N(v) \leqslant \rho_M(u)+1$$

从而得到

$$\|u\|_M \leqslant \rho_M(u)+1$$

(2) 设 $B\subset L_M^*$ 按范数有界，即存在 $p>0$, 使 $u\in B$ 时 $\|u\|_M\leqslant p$. 取 $u_0\geqslant 0$, $K\geqslant 1$, 使 $u\geqslant u_0$ 时 $M(pu)\leqslant KM(u)$. 于是

对任何 $u\in B$，由定理 1.17，$\rho_M\left(\frac{u}{p}\right)\leqslant\left\|\frac{u}{p}\right\|_M\leqslant 1$。从而

$$\rho_M(u)=\int\limits_{G(|u(t)|\leqslant pu_0)}M(u(t))dt+\int\limits_{G(|u(t)|>pu_0)}M\left(p\frac{u(t)}{p}\right)dt$$

$$\leqslant M(pu_0)\mathrm{mes}G+K\int\limits_G M\left(\frac{1}{p}u(t)\right)dt\leqslant M(pu_0)\mathrm{mes}G+K$$

定理 1.19 (1) 依范数收敛蕴涵依模收敛；(2) 依模收敛蕴涵依范数收敛的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$。

证 (1) 由定理 1.17 立得。

(2) 必要性。若 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，由例 1.3，有 $\{u_n(t)\}$ 使 $\rho_M(u_n)=\frac{1}{2^n}\to 0(n\to\infty)$，但 $\rho_M(2u_n)=\infty(n=1,2,\cdots)$.若$\{u_n\}$依范数收敛，则$\{2u_n\}$亦然，这与（1）不相容。

充分性。对任给 $\varepsilon>0$，选 $u_o>0$，$K>1$ 使得$M\left(\frac{u_0}{\varepsilon}\right)\mathrm{mes}\,G<\varepsilon$ 且 $u\geqslant u_0$ 时 $M\left(\frac{1}{\varepsilon}u\right)\leqslant KM(u)$。对于 $u_n\in L_M^*$，$\rho_M(u_n)\to 0$ $(n\to\infty)$，因

$$\rho_M\left(\frac{1}{\varepsilon}u_n\right)\leqslant M\left(\frac{u_0}{\varepsilon}\right)\mathrm{mes}G+K\int\limits_G M(u_n(t))dt<\varepsilon+K\rho_M(u_n)$$

根据在定理 1.18 之（1）的证明中得到的$\|u\|_M\leqslant\rho_M(u)+1$，知

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}u_n\right\|\leqslant 1+\rho_M\left(\frac{1}{\varepsilon}u_n\right)\leqslant 1+\varepsilon+K\rho_M(u_n)\to 1+\varepsilon$$

$(n\to\infty)$。由 ε 的任意性，得$\|u_n\|_M\to 0(n\to\infty)$。

下述的定理是 L^p $(p>1)$ 空间中 Hölder 不等式的推广。

定理 1.20 若 $u\in L_M^*$，$v\in L_N^*$，则

$$\left|\int\limits_G u(t)v(t)dt\right|\leqslant\|u\|_M\|v\|_N \tag{1.26}$$

证 由定理 1.17 知 $v\neq\theta$ 时$\rho_N\left(\frac{v}{\|v\|_N}\right)\leqslant 1$. 所以

$$\|u\|_M\geqslant\left|\int_G u(t)\frac{v(t)}{\|v\|_N}dt\right|$$

即 (1.26) 成立.

下面讨论 $L_M{}^*$ 的线性子空间 E_M. 先设 G上所有有界可测函数之集按$\|\cdot\|_M$ 的闭包为 D, 我们将证明 $E_M=D$.

引理 1.2 任何 $u\in L_M$ 到D的距离 $d(u, D)\leqslant 1$.

证 对于$\varepsilon>0$, 选 n 使 $\rho_M(u_n)>\rho_M(u)-\varepsilon$, 其中

$$u_n(t)=\begin{cases}u(t), |u(t)|\leqslant n\\ 0\ \ , |u(t)|>n\end{cases}\qquad(1.27)$$

因$u_n\in D$, 故由 Young 不等式

$$d(u,D)\leqslant\|u-u_n\|_M\leqslant 1+\rho_M(u-u_n)=1+\rho_M(u)-\rho_M(u_n)<1+\varepsilon$$

即 $d(u,D)\leqslant 1$.

定理 1.21 $E_M=D$.

证 任取 $u\in E_M$, 则对任何 $k\geqslant 1$, $ku\in L_M$. 由引理 1.2, $d(ku, D)\leqslant 1$ 或 $d(u, D)\leqslant\frac{1}{k}$.据$k$的任意性, $d(u,D)=0$.又 D 闭, 故 $u\in D$.

反之, 若 $u\in D$, 则对任何 $k\geqslant 1$ 有 $2ku\in D$. 因而存在有界函数$w(t)$使$\|2ku-w\|_M\leqslant 1$.由定理 1.17,$\rho_M(2ku-w)\leqslant 1$.据$M(u)$的凸性有

$$\rho_M(ku)\leqslant\frac{1}{2}\rho_M(2ku-w)+\frac{1}{2}\rho_M(w)<\infty$$

即 $u\in E_M$.

定义 1.7 设 $u\in L_M{}^*$. 若 $\lim\limits_{mes E\to 0}\|u\chi_E\|_M=0$, 就称$u$是范数绝对连续的.

定理 1.22 下述命题等价: (1) $u\in E_M$, (2) $\|u-u_n\|_M\to 0\ (n\to\infty)$($u_n$ 的定义同于 (1.27)), (3) u 是范数绝对连续

的.

证 (1) ⇒ (2) 对 $\varepsilon>0$，因 $u\in E_M$，故 $\rho_M\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)<\infty$，

于是n充分大时 $\rho_M\left(\frac{u-u_n}{\varepsilon}\right)\leqslant 1$. 由 Young 不等式，$n$充分大时

$\left\|\frac{u-u_n}{\varepsilon}\right\|_M\leqslant 2$，因而$\|u-u_n\|_M\to 0(n\to\infty)$.

(2) ⇒ (3) 对 $\varepsilon>0$，取 n_0 使$\|u-u_{n_0}\|_M<\frac{\varepsilon}{2}$. 因$u_{n_0}(t)$

有界，故存在 $\delta>0$ 使 $\mathrm{mes}E<\delta$ 时$\|u_{n_0}\chi_E\|_M<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是$\mathrm{mes}\,E$

$<\delta$ 时

$$\|u\chi_E\|_M\leqslant\|(u-u_{n_0})\chi_E\|_M+\|u_{n_0}\chi_E\|_M<\varepsilon\quad.$$

(3) 得证.

(3) ⇒ (1) 在 (1.27) 的记号下，再记$G_n=G(|u(t)|>n)$，则 $\mathrm{mes}G_n\to 0(n\to\infty)$.故$\|u-u_n\|_M=\|u\chi_{G_n}\|_M\to 0(n\to\infty)$.因$u_n\in E_M$，$E_M=D$ 闭，所以 $u\in E_M$.

注 在 (1.27) 的记号下，由定义直接可得

a) $\|u_n\|_M\to\|u\|_M\quad(u\in L_M{}^*)$ (1.28)

b) $u\in L_M$ 时

$$\rho_M(u)-\rho_M(u_n)=\rho_M(u-u_n)\longrightarrow 0\quad(u\to\infty)\qquad(1.29)$$

由于 $E_M=D$，E_M 中的元素是范数绝对连续的，利用 Лузин 定理，易证连续函数类在 E_M 中稠，因而 E_M 是可分的. 一般地，$L_M{}^*$ 不可分.

定理 1.23 $L_M{}^*$ 可分的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$.

证 充分性显然. 今证必要性. 设 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，我们利用例 1.3 中的数列$\{u_k\}$和集列$\{G_k\}$构造出 $L_M{}^*$ 中的一个不可数集，使其中每两元的距离大于某一正常数，这就与 $L_M{}^*$ 的可分性矛盾了. 对于集合

$$\{(a_k)_{k=1}^{\infty}: a_k = 0, 1\}$$

中每两元素 (a_k) 和 (b_k)，若 $a_k \neq b_k$ 的个数有限，就说 (a_k) 和 (b_k) 属于同一个等价类，再由每一个等价类中任取一个作代表，以 B 记这些代表的全体之集，显然 B 不可数且 B 中任何两元都有无穷多个坐标不相同。令命

$$\overline{B} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k' \chi_{G_k}(t) : (a_k)_{k=1}^{\infty} \in B \right\}$$

则 $\overline{B}$ 与 B 一一对应，从而不可数。完全仿照例 1.3 的计算，可知 $\overline{B}$ 中所有元的模均不大于 ε 且对任何 $l > 1$ 和 $\overline{B}$ 中任何两元 u，v，有 $\rho_M(l|u-v|) = \infty$。我们证明 $\|u-v\|_M \geqslant 1$。事实上，若 $\|u-v\|_M < 1$，则由定理 1.17 有

$$\|u-v\|_M \geqslant \rho_M\left(\frac{u-v}{\|u-v\|_M}\right) = \infty$$

这一矛盾最终说明 $L_M{}^*$ 不可分。

以下讨论由不同的 N 函数所产生的 Orlicz 空间的包含关系。

定理 1.24 $L_{M_1}{}^* \subset L_{M_2}{}^*$ 的充要条件是 $M_1(u)$ 快于 $M_2(u)$。此时存在 $\beta > 0$ 使得 $\|u\|_{M_2} \leqslant \beta \|u\|_{M_1}$ $(u \in L_{M_1}{}^*)$。

证 充分性。取 a，$b > 1$，$u_0 \geqslant 0$ 使 $u \geqslant u_0$ 时 $M_2(u) \leqslant aM_1(bu)$。对任何 $u \in L_{M_1}{}^*$，有 $\varepsilon > 0$ 使得 $\rho_{M_1}(\varepsilon u) < \infty$。于是

$$\int_G M_2\left(\frac{\varepsilon}{b} u(t)\right) dt \leqslant M_2(u_0)\,\mathrm{mes}G + a\int_G M_1(\varepsilon u(t))\,dt < \infty$$

因此 $u \in L_{M_2}{}^*$。

必要性。若 $M_1(u)$ 不快于 $M_2(u)$，则有正数列 $u_n \uparrow \infty$ 使得 $M_2(u_n) > M_1(2^n n u_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$。取 G 的一个两两不交子集列 $\{G_n\}$ 满足

$$\mathrm{mes}G_n = \frac{M_1(u_1)\,\mathrm{mes}G}{2^n M_1(n u_n)} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

考虑函数

$$u(t)=\begin{cases} nu_n, & t\in G_n \quad =1,2,\cdots \\ 0, & t\in G\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n \end{cases}.$$

因

$$\int_G M_1(u(t))dt=\sum_{n=1}^{\infty}M_1(nu_n)\text{mes}G_n=M_1(u_1)\text{mes}G<\infty$$

所以 $u\in L_{M_1}\subset L_{M_1}^*$。但对任何 $\lambda>0$，有 $m>\frac{1}{\lambda}$，而

$$\int_G M_2(\lambda u(t))dt>\sum_{n=m}^{\infty}M_2(\lambda nu_n)\text{mes}G_n>\sum_{n=m}^{\infty}M_2(u_n)\text{mes}G_n$$

$$>\sum_{n=m}^{\infty}M_1(2^n nu_n)\frac{M_1(u_1)\text{mes}G}{2^n M_1(nu_n)}\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}M_1(u_1)\text{mes}G=\infty$$

这表明 $u\overline{\in}L_{M_2}^*$。矛盾。

最后，设 $M_2(u)\leqslant aM_1(bu)\,(u\geqslant u_0)$。取 $\lambda=a+M_2(u_0)\text{mes}G+1$。对 $u\in L_{M_1}^*$，由定理 1.17 有

$$\int_G M_2\left(\frac{u(t)}{\lambda b\|u\|_{M_1}}\right)dt\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_G M_2\left(\frac{u(t)}{b\|u\|_{M_1}}\right)dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\left[M_2(u_0)\text{mes}G+a\int_G M_1\left(\frac{u(t)}{\|u\|_{M_1}}\right)dt\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}[M_2(u_0)\text{mes}G+a]<1$$

联系 Young 不等式，得 $\left\|\frac{u}{\lambda b\|u\|_{M_1}}\right\|_{M_2}\leqslant 2$。取 $\beta=2\lambda b$，即 $\|u\|_{M_2}\leqslant\beta\|u\|_{M_1}$。

推论 1.1 当且仅当 $M_1(u)$ $M_2(u)$与等价时 $L_{M_1}^*=L_{M_2}^*$ 且此时$\|\cdot\|_{M_1}$与$\|\cdot\|_{M_2}$等价。

§ 3 范数计算与 Luxemburg 范数

1. 范数的计算 Orlicz 空间 L_M^* 是由 $M(u)$唯一决定的，但其范数$\|\cdot\|_M$ 与 $M(u)$并无直接关系，因而不易通过$M(u)$对范

数进行讨论。在此我们给出两个范数计算公式。

定理 1.25 若存在 $k_0>0$ 使得

$$\int_G N[p((k_0|u(t)|)]dt=1 \qquad (1.30)$$

则

$$\|u\|_M=\int_G |u(t)|\cdot p(k_0|u(t)|)dt \qquad (1.31)$$

证 由 (1.30) 立即得到

$$\|u\|_M\geq\int_G |u(t)|\cdot p(k_0|u(t)|)dt$$

另一方面，由 (1.30) 和 (1.11) Young不等式呈等号情形得

$$\|u\|_M=\frac{1}{k_0}\sup_{\rho_N(v)\leq 1}\left|\int_G u(t)k_0v(t)dt\right|\leq\frac{1}{k_0}\left(1+\int_G M(k_0u(t))dt\right)$$

$$=\frac{1}{k_0}\left(\int_G [p(k_0|u(t)|)]dt+\int_G M(k_0u(t))dt\right)$$

$$=\frac{1}{k_0}\int_G p(k_0|u(t)|)k_0|u(t)|dt=\int_G |u(t)|\cdot p(k_0|u(t)|)dt$$

即 (1.31) 成立。

上述计算公式只有在满足 (1.30) 的 k_0 存在时才有效，而事实上这种 k_0 有时是不存在的。但是可以证明，当 $p(t)$ 连续时上述 k_0 对任何 $u\in E_M$ 可以找到。对于一般情形，我们有

定理 1.26 对任何 $u\in L_M^*$

$$\|u\|_M=\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(ku(t)dt\right) \qquad (1.32)$$

证 不妨设 $u\neq\theta$。

(1) 先设 $p(t)$ 连续，$u(t)$ 有界。此时 k 的函数 $\int_G N(p(k|u(t)|))dt$ 在 $[0,\infty)$ 上连续且在零点为零，在 ∞ 点为 ∞，故必存在 $k_0>0$ 使 $\int_G N(p(k_0|u(t)|))dt=1$。于是由定理 1.25 和

(1.11) 有

$$\|u\|_M=\frac{1}{k_0}\int_G p(k_0|u(t)|)|k_0u(t)|dt=\frac{1}{k_0}\left(1+\int_G M(k_0u(t))\right)dt$$

$$\geqslant\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(ku(t))dt\right)$$

但是对任何 $k>0$，由 Young 不等式

$$\|u\|_M\leqslant\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(ku(t))dt\right)$$

故总有

$$\|u\|_M\leqslant\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(ku(t))dt\right) \tag{1.33}$$

因而此时 (1.32) 成立.

(2) 只假定 $p(t)$连续，$u\in L_M^*$. 对每一自然数 n，按 (1.27) 的定义，$u_n(t)$有界，故由 (1)，存在 k_n 使

$$\int_G N[p(k_n|u_n(t)|)]dt=1$$

$$\|u_n\|_M=\frac{1}{k_n}\left(1+\int_G M(k_nu_n(t))\right)dt$$

由第一式知$\left\{\frac{1}{k_n}\right\}$非减. 再由

$$\frac{1}{k_n}<\frac{1}{k_n}\left(1+\int_G M(k_nu_n(t))dt\right)=\|u_n\|_M\leqslant\|u\|_M$$

知$\left\{\frac{1}{k_n}\right\}$有极限$\frac{1}{k_0}$. 令 $n\to\infty$，便得到

$$\|u\|_M\geqslant\frac{1}{k_0}\left(1+\int_G M(k_0u(t))\,dt\right)$$

联系 (1.33)，得到 (1.32).

(3) 一般情形. 对任给$\varepsilon>0$，由定理 1.10，存在严格凸的 N函数 $N_1(v)$使得

$$N(v)\leqslant N_1(v)\leqslant(1+\varepsilon)N(v) \tag{1.34}$$

由此可知 $N_1(v)$的余函数 $M_1(u)$ 的右导数 $p_1(t)$ 连续且由定理 1.6，定理1.7 有

$$M(u)\geqslant M_1(u)\geqslant(1+\varepsilon)M\left(\frac{1}{1+\varepsilon}u\right) \tag{1.35}$$

由 (1.34)

$$\sup_{\rho_{N_1}(v)\leqslant 1}\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|\leqslant \sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|$$

$$\leqslant \sup_{\rho_{N_1}(v)\leqslant 1+\varepsilon}\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|\leqslant \sup_{\rho_{N_1}\left(\frac{v}{1+\varepsilon}\right)\leqslant 1}\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|$$

$$=\sup_{\rho_{N_1}(v)\leqslant 1}\left|\int_G u(t)(1+\varepsilon)v(t)dt\right|$$

即
$$\|u\|_{M_1}\leqslant\|u\|_M\leqslant(1+\varepsilon)\|u\|_{M_1} \tag{1.36}$$

再由式 (1.35) 和 (2) 得

$$\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(ku(t))dt\right)$$

$$\leqslant \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{1+\varepsilon}\int_G M_1(k(1+\varepsilon)u(t))dt\right)$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\|u\|_{M_1}=(1+\varepsilon)\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M_1(ku(t))dt\right)$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(ku(t))dt\right) \tag{1.37}$$

联合 (1.36) 并注意 ε 的任意性便知 (1.32) 不谬。

一个很重要的问题是 (1.32) 中的下确界能否达到，这个问题的答案是肯定的。先引入两个记号

$$k^*=k^*(u)=\inf\{k>0:\int_G N[p(k|u(t)|)]dt\geqslant 1\}$$

$$k^{**}=k^{**}(u)=\sup\{k>0:\int_G N[p(k|u(t)|)]dt\leqslant 1\}$$

$(u \in L_M^*)$.不难验证，对任何 u 有 $k^* \leqslant k^{**}$.

定理 1.27 当且仅当 $k \in [k^*, k^{**}]$ 时

$$\|u\|_M = \frac{1}{k}\left(1 + \int_G M(ku(t))dt\right) \quad (u \neq \theta) \tag{1.38}$$

证 由定理 1.26，只须说明当且仅当 $k \in [k^*, k^{**}]$ 时，函数

$$L(k) = \frac{1}{k}\left(1 + \int_G M(ku(t))dt\right) \quad (k > 0)$$

达到极小值.

以 Ω 代表 $L(k)$的定义域，先证 $L(k)$有最小值.显然$L(k)$ 在 Ω 上连续. 若 $\Omega = (0, \infty)$，则因为$L(0) = L(\infty) = \infty$（由 $u \neq 0$ 时$\lim\limits_{k \to \infty} \frac{M(ku)}{k} = \infty$可知），所以 $\inf L(k)$可达.若 $\Omega = (0, b]$，则由 Levy 定理，$L(b-0) = \infty$，故 $\inf L(k)$ 也可达. 若 $\Omega = (0, b]$，则更易得到 $\inf L(k)$ 可达的结论.

次证 $k^{**} \in \Omega$. 对任何 $k \in (0, k^{**})$，由 k^{**} 定义，$\int_G N[p(k|u(t)|)]dt \leqslant 1$.所以

$$\left|\int_G |u(t)| p(k|u(t)|)dt\right| \leqslant \|u\|_M$$

由 Young 不等式相等情形有

$$L(k) \leqslant \frac{1}{k}\left(1 + \int_G k|u(t)|p(k|u(t)|)dt\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{k} + \|u\|_M < \infty$$

再由 Fatou 定理，便知$L(k^{**}) \leqslant \frac{1}{k^{**}} + \|u\|_M < \infty$.

现在证明定理的结论. 对 $k < k^*$，按通常数学分析中规则可求 $L(k)$ 的右导数

$$L_+'(k) = -\frac{1}{k^2}\left(1+\int_G M(ku(t))dt\right)+\frac{1}{k}\int_G p(k|u(t)|)|u(t)|dt$$

$$=\frac{1}{k^2}\left[\int_G N(p(k|u(t)|))dt-1\right]<0$$

所以 k 不是 $L(k)$ 的极小点。

若 $k>k^{**}$，取 k' 使 $k^{**}<k'<k$，则

$$L(k)-L(k')$$

$$=\frac{k-k'}{kk'}\left\{-1+\frac{k'}{k-k'}\int_G [M(ku(t))-M(k'u(t))]dt\right.$$

$$\left.-\int_G M(k'u(t))dt\right\}$$

$$\geqslant\frac{k-k'}{kk'}\left\{-1+\frac{k'}{k-k'}\int_G (k-k')|u(t)|p(k'|u(t)|)dt\right.$$

$$\left.-\int_G M(k'u(t))dt\right\}$$

$$=\frac{k-k'}{kk'}\left\{\int_G N[p(k'|u(t)|)]dt-1\right\}>0$$

最后一式大于零是因为 $k'>k^{**}$。上式表明 k 不是 $L(k)$ 的极小点。

如果 $k^*=k^{**}$，那么由上面的讨论，它就是 $L(k)$ 的极小点。如果 $k^*<k_0<k^{**}$，那么由 k^* 和 k^{**} 的定义，此时必有 $\int_G N[p(k_0|u(t)|)]dt=1$，从而由定理 1.25 的证明，$L(k_0)=\|u\|_M=\inf\limits_{k>0}L(k)$。最后由 Levy 定理

$$L(k^{**})=\lim_{k\to k^{**}-0}L(k)=\inf_{k>0}L(k)$$

$$L(k^*)=\lim_{k\to k^*+0}L(k)=\inf_{k>0}L(k)$$

证毕。

定理 1.28 集合

$$K=\left\{k:\|x\|_M=\frac{1}{k}\left(1+\int M(kx(t))dt\right),\ a\leqslant\|x\|_M\leqslant b\right\}$$

对任何 $b\geqslant a>0$ 是一有界集的充要条件是 $M(u)\in\nabla_2$.

证 充分性. 记 $u_0=M^{-1}\left(\frac{1}{2\text{mes}G}\right)$. 由定理1.8的(6)容易找到 $p>1$, $l>1$ 使得 $u\geqslant u_0$ 时 $M(lu)\geqslant plM(u)$. 对于 $b\geqslant a>0$, $k>0$ 和 $x\in L_M^*$满足

$$a\leqslant\|x\|_M=\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(kx(t))dt\right)\leqslant b$$

由定理 1.26 有

$$a\leqslant\|x\|_M\leqslant\frac{a}{2}\left(1+\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt\right)$$

所以$\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt\geqslant 1$. 于是

$$\int_{G\left(\frac{2}{a}|x(t)|\geqslant u_0\right)} M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt\geqslant\int_G M\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt-M(u_0)\text{mes}G$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

假定 $k>\frac{2}{a}l$.选自然数i使$l^i<\frac{1}{2}ak\leqslant l^{i+1}$.重复使用不等式 $M(lu)\geqslant plM(u)(u\geqslant u_0)$,得 $M(l^iu)\geqslant p^il^iM(u)(u\geqslant u_0)$.于是

$$b\geqslant\|x\|_M=\frac{1}{k}\left(1+\int_G M(kx(t))dt\right)$$

$$\geqslant\int_{G\left(\frac{2}{a}|x(t)|\geqslant u_0\right)}\frac{1}{k}M\left(\frac{1}{2}ak\frac{2}{a}x(t)\right)dt$$

$$>\int_{G\left(\frac{2}{a}|x(t)|\geqslant u_0\right)}\frac{1}{k}p^il^iM\left(\frac{2}{a}x(t)\right)dt$$

$$>\frac{1}{k}p^i l^i \cdot \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}p^i l^i \frac{a}{2l^{i+1}} = \frac{a}{4l}p^i$$

这说明 $i < \log_p(4lb/a)$，因而

$$k \leqslant \frac{2}{a} l^{1+\log_p(8lb/a)}$$

必要性。如果 $M(u)\overline{\in}\nabla_2$，那么由定理 1.8 的（6），存在 $l_n \uparrow \infty, u_n \uparrow \infty$，$l_1 \geqslant 2$，$M(u_1)\text{mes}G \geqslant \frac{1}{2}$ 使得

$$M(l_n u_n) < \left(1 + \frac{1}{n}\right) l_n M(u_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

对每个自然数 n，选 G 的一个子集 G_n 使得恒有 $M(u_n)\text{mes}G_n = \frac{1}{2}$ 并定义 $x_n(t) = x_{G_n}(t)$，那么由定理 1.17 和定理 1.26 有

$$\frac{1}{2} = \rho_M(x_n) \leqslant \|x_n\|_M \leqslant \frac{1}{l_n}\left(1 + \int_G M(l_n x_n(t))dt\right)$$

$$= \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_n} M(l_n u_n)\,\text{mes}G_n < \frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) l_n M(u_n)\text{mes}G_n$$

$$= \frac{1}{l_n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \qquad (n \to \infty)$$

如果 k_n 满足 $\|x_n\|_M = \frac{1}{k_n}\left(1 + \int_G M(k_n x_n(t))dt\right)$，那么由上面的不等式，$n$ 充分大时必有 $k_n > 1$。因此 n 充分大时应有

$$\frac{1}{l_n} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \|x_n\|_M = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n} M(k_n u_n)\text{mes}G_n$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n} + M(u_n)\text{mes}\ G_n = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{2}$$

命 $n \to \infty$，便得到 $k_n \to \infty$。必要性得证。

2. Luxemburg **范数** 由于 $u \in L_M{}^*$ 时 $\rho_M\left(\frac{u}{\|u\|_M}\right) \leqslant 1\ (u \neq \theta)$

（见定理1.17），故数集

$$\left\{k>0: \int_G M\left(\frac{u(t)}{k}\right)dt\leqslant 1\right\}$$

非空，从而

$$\|u\|_{(M)}=\inf\left\{k>0: \int_G M\left(\frac{u(t)}{k}\right)dt\leqslant 1\right\} \tag{1.39}$$

定义了 L_M^* 上一个泛函．今证它满足范数的三条公理．

（1） 容易看出$\|u\|_{(M)}\geqslant 0$ 及 $u=\theta\Leftrightarrow\|u\|_{(M)}=0$；

（2） 对任何实数 $\alpha\neq 0$，$u\in L_M^*$

$$\|\alpha u\|_{(M)}=|\alpha|\inf\left\{\frac{k}{|\alpha|}>0: \int_G M\left(\frac{|\alpha|}{k}u(t)\right)dt\leqslant 1\right\}$$

$$=|\alpha|\|u\|_{(M)};$$

（3） 在验证$\|\cdot\|_{(M)}$ 的三角不等式之前，先说明对任何 L^*_N 中非零元 u，有 $\rho_M\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)\leqslant 1$．事实上，由 $\|\cdot\|_{(M)}$ 定义，存在 $a_n\downarrow\|u\|_{(M)}$且$\rho_M\left(\frac{u}{a_n}\right)\leqslant 1$．令 $n\to\infty$，由Levy 定理，即得

$$\rho_M\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)\leqslant 1.$$

对任意 u_1，$u_2\in L_M^*$，无碍于一般性，设 $u_1\neq\theta$，$u_2\neq\theta$．由 $M(u)$的凸性有

$$M\left(\frac{u_1(t)+u_2(t)}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\right)\leqslant\frac{\|u_1\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}M\left(\frac{u_1(t)}{\|u_1\|_{(M)}}\right)$$

$$+\frac{\|u_2\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}M\left(\frac{u_2(t)}{\|u_2\|_{(M)}}\right)$$

积分这个不等式并注意 $\rho_M\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)\leqslant 1$，得

$$\int_G M\left(\frac{u_1(t)+u_2(t)}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\right)dt\leqslant 1$$

从而由$\|\cdot\|_{(M)}$ 定义得$\|u_1+u_2\|_{(M)}\leqslant\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}$．

我们称$\|\cdot\|_{(M)}$为 L_M^*上的 Luxemburg范数. 为简单起见，我们记 $L_M^*=(L_M^*,\|\cdot\|_M)$，$E_M=(E_M,\|\cdot\|_M)$，$L_{(M)}^*=(L^*_{(M)},\|\cdot\|_{(M)})$，$E_{(M)}=(E_M,\|\cdot\|_{(M)})$.

范数$\|\cdot\|_{(M)}$有如下基本性质.

定理 1.29 (1) $\rho_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)\leqslant 1(u\neq\theta)$; $\rho_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)=1$对一切 $u\neq\theta$ 成立的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$.

(2) 对任何 $u\in L_M^*$ 有

$$\|u\|_{(M)}\leqslant 1\Rightarrow\rho_M(u)\leqslant\|u\|_{(M)} \tag{1.40}$$

$$\|u\|_{(M)}>1\Rightarrow\rho_M(u)>\|u\|_{(M)} \tag{1.41}$$

(3) 对一切 $u\in L_M^*$ 有

$$\|u\|_{(M)}\leqslant\|u\|_M\leqslant 2\|u\|_{(M)}$$

(4) 对任何 $u\in L_M^*$, $v\in L_N^*$, 成立加强了的 Hölder 不等式

$$\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|\leqslant\|u\|_M\|v\|_{(N)} \tag{1.42}$$

$$\left|\int_G u(t)v(t)dt\right|\|u\|_{(M)}\|v\|_N \tag{1.43}$$

证 (1) 的第一个结论在验证范数$\|\cdot\|_{(M)}$的三角不等式时已经证过，今证 (1) 的后一结论. 因$\rho_M\left(\dfrac{u}{k}\right)$作为$k>0$的函数在其定义域内连续，而当 $M(u)\in\Delta_2$ 时 $L_M=L_M^*$ 是线性集，故此时$\rho_M\left(\dfrac{u}{k}\right)$的定义域为 $(0,\infty)$，从而$\rho_M\left(\dfrac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)<1$是不可能的. 反之，若 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，由例 1.3，存在$u_n(t)\in L_M^*$，$\rho_M(u_n)=\dfrac{1}{2^n}$，但对任何$l>1$ 有 $\rho_M(lu_n)=\infty$. 由$\|\cdot\|_{(M)}$的定义，立即可知$\|u_n\|_{(M)}=1$. 矛盾.

(2) 若$\|u\|_{(M)}\leqslant 1$，由 $M(u)$ 的凸性及 (1) 有

$$\frac{1}{\|u\|_{(M)}}\int_G M(u(t))\,dt \leqslant \int_G M\left(\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right)dt \leqslant 1$$

若$\|u\|_{(M)}>1$，则$\frac{1}{\|u\|_{(M)}}<1$.同理有$\frac{1}{\|u\|_{(M)}}\rho_M(u)>1$.

(3) 由定理1.17，$\int_G M\left(\frac{u(t)}{\|u\|_M}\right)dt\leqslant 1$,故$\|u\|_{(M)}\leqslant\|u\|_M$.再由 Young 不等式，$\|u\|_M\leqslant\rho_M(u)+1$，故得

$$\left\|\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right\|_M \leqslant 1+\int_G M\left(\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right)dt\leqslant 2$$

(4) 由 (1)，$\rho_N\left(\frac{v}{\|v\|_{(N)}}\right)\leqslant 1$.所以

$$\|u\|_M \geqslant \left|\int_G u(t)\,\frac{v(t)}{\|v\|_{(N)}}\,dt\right|$$

则 (1.42) 得证. 同理可证 (1.43).

定理 1.30 设a,b为正常数.若N函数$M_1(u)$，$M(u)$满足$M(au)\leqslant M_1(u)\leqslant M(bu)$，则 (1) $a\|u\|_M\leqslant\|u\|_{M_1}\leqslant b\|u\|_M$，(2) $a\|u\|_{(M)}\leqslant\|u\|_{(M_1)}\leqslant b\|u\|_{(M)}$.

证 (1) 由定理1.27，存在 k_1，$k_2>0$ 使

$$\|bu\|_M=\frac{1}{k_1}\Big(1+\rho_M(k_1bu)\Big);\quad \|u\|_{M_1}=\frac{1}{k_2}\Big(1+\rho_{M_1}(k_2u)\Big)$$

(这里不妨假定 $u\neq\theta$). 联系定理 1.26 有

$$\|bu\|_M=\frac{1}{k_1}\left(1+\int_G M(k_1bu(t))dt\right)\geqslant\frac{1}{k_1}\left(1+\int_G M_1(k_1u(t))dt\right)$$

$$\geqslant\|u\|_{M_1}=\frac{1}{k_2}\left(1+\int_G M_1(k_2u(t))dt\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{k_2}\left(1+\int_G M(k_2au(t))dt\right)\geqslant\|au\|_M.$$

(2) 由条件

$$\|au\|_{(M)}=\inf\left\{k>0:\ \int_G M\left(\frac{au(t)}{k}\right)dt\leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant \inf\left\{k>0:\int_G M_1\left(\frac{u(t)}{k}\right)dt\leqslant 1\right\}$$

$$=\|u\|_{(M_1)}\leqslant \inf\left\{k>0:\int_G M\left(\frac{bu(t)}{k}\right)dt\leqslant 1\right\}=\|bu\|_{(M)}$$

在定理 1.29 中，我们得到$\|u\|_M\geqslant\|u\|_{(M)}$。事实上，我们有更强的结论。

定理 1.31 $\|u\|_M>\|u\|_{(M)}$ 对所有非零的 $u\in L_M^*$ 成立。

证 取 $k>0$ 使 $\left\|\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right\|_M=\frac{1}{k}\left(1+\rho_M\left(\frac{ku}{\|u\|_{(M)}}\right)\right)$。假如$\|u\|_M=\|u\|_{(M)}$，则必有 $k>1$。对任何正数 $\varepsilon<1-\frac{1}{k}$，由 (1.41)，$\rho_M\left(\frac{u}{(1-\varepsilon)\|u\|_{(M)}}\right)>1$，注意 $k(1-\varepsilon)>1$，我们有

$$1=\left\|\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right\|_M=\frac{1}{k}\left(1+\rho_M\left(\frac{k(1-\varepsilon)u}{(1-\varepsilon)\|u\|_{(M)}}\right)\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{k}\left[1+k(1-\varepsilon)\rho_M\left(\frac{u}{(1-\varepsilon)\|u\|_{(M)}}\right)\right]$$

$$>\frac{1}{k}[1+k(1-\varepsilon)]=\frac{1}{k}+(1-\varepsilon)$$

由 ε 的任意性得到矛盾的不等式 $1\geqslant\frac{1}{k}+1>1$。证毕。

对于 $u\in L_M^*$，记

$G_n(u)=\{t\in G:|u(t)|\geqslant n\}$；$u_n(t)=u(t)\chi_{G/G_n(u)}(t)$

再引入记号

$$d_1(u)=d(u,E_M)=\inf\{\|u-w\|_M:w\in E_M\}$$
$$d_2(u)=d(u,E_{(M)})=\inf\{\|u-w\|_{(M)}:w\in E_M\}$$
$$\xi_0=\xi_0(u)=\inf\left\{\xi>0:\rho_M\left(\frac{u}{\xi}\right)<\infty\right\}$$

显然，$u\in E_M$ 当且仅当 $d_1(u)=d_2(u)=\xi_0(u)=0$。

定理 1.32 对任何 $u \in L_M^*$

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{(M)}=\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_M=\xi_0(u)$$

证 $u\in E_M$ 时上式各项均为零（见定理 1.22），故命题自真。今设 $u\in L_M^*\backslash E_M$。因 n 增加时 $\|u-u_n\|_{(M)}$ 与 $\|u-u_n\|_M$ 非增，所以定理中二极限都存在。再由 $u\overline{\in} E_M$ 知 $\xi_0>0$。对任何正数 $\varepsilon<\xi_0$，由 ξ_0 的定义

$$\rho_M\left(\frac{u}{\xi_0-\varepsilon}\right)=\int_G M\left(\frac{u(t)}{\xi_0-\varepsilon}\right)dt=\infty$$

所以对任何 $n\geqslant 1$ 有 $\rho_M\left(\frac{u-u_n}{\xi_0-\varepsilon}\right)=\infty$。这表明 $\|u-u_n\|_{(M)}\geqslant\xi_0-\varepsilon$。由 ε 的任意性及定理 1.31，得

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_M\geqslant\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{(M)}\geqslant\xi_0$$

另一方面，因 $\varepsilon>0$ 时 $\rho_M\left(\frac{u}{\xi_0+\varepsilon}\right)<\infty$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_M\left(\frac{u-u_n}{\xi_0+\varepsilon}\right)=0$。于是由定理 1.26

$$\|u-u_n\|_M\leqslant(\xi_0+\varepsilon)\left[1+\rho_M\left(\frac{u-u_n}{\xi_0+\varepsilon}\right)\right]\to\xi_0+\varepsilon$$

$(n\to\infty)$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u-u_n\|_M\leqslant\xi_0$。定理得证。

定理 1.33 对任何 $u\in L_M^*$，$d_1(u)=d_2(u)=\xi_0$。

证 不妨设 $u\in L_M^*\backslash E_M$。由定理 1.32 和定理 1.31

$$\xi_0=\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_M\geqslant d_1(u)\geqslant d_2(u)$$

故只须证明 $d_2(u)\geqslant\xi_0$。对任给正数 $\varepsilon<\frac{1}{2}\xi_0$ 和有界函数 $w\in E_M$，设 $|w(t)|\leqslant k$，取 $a>0$ 使 $\frac{1-a}{\xi-2\varepsilon}>\frac{1}{\xi_0-\varepsilon}$。因在 $G_n(u)$ 上 $|u(t)|\geqslant n$，故当 $n>\frac{k}{a}$ 时在 $G_n(u)$ 上恒有

$$|u(t)-w(t)|>(1-a)|u(t)|$$

于是 $n>\frac{k}{a}$时

$$\rho_M\left(\frac{u-w}{\xi_0-2\varepsilon}\right)\geqslant\int_{G_n(u)}M\left(\frac{u(t)-w(t)}{\xi_0-2\varepsilon}\right)dt$$

$$\geqslant\int_{G_n(u)}M\left(\frac{1-a}{\xi_0-2\varepsilon}u(t)\right)dt\geqslant\int_{G_n(u)}M\left(\frac{u(t)}{\xi_0-\varepsilon}\right)dt=\infty$$

这说明$\|u-w\|_{(M)}\geqslant\xi_0-2\varepsilon$。再由 ε 的任意性以及有界可测函数全体在 E_M 中稠可知 $d_2(u)\geqslant\xi_0$。

下面介绍一个十分有用的引理。

引理 1.3 若 $M(u)\in\Delta_2$，则对任何 $L>0$，$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对一切 u，$v\in L_M{}^*$，只要 $\rho_M(u)\leqslant L$，$\rho_M(v)\leqslant\delta$，就有

$$|\rho_M(u+v)-\rho_M(u)|<\varepsilon \tag{1.44}$$

证 因为$M(u)\in\Delta_2$ 时模有界与范数有界等价，所以数集

$$\{\rho_M(2u+2v):\rho_M(u)\leqslant L;\rho_M(v)\leqslant 1\}$$

有界。设 L_0 为其上界，则 $L_0>L$。不妨设 $L_0>1$，$\varepsilon<1$。命 $\beta=\frac{2\varepsilon}{3L_0}$，则 $\beta\in(0,1)$。取$v_0>0$使得 $M\left(\frac{2}{\beta}v_0\right)\text{mes}\,G<\frac{\varepsilon}{3}$。

因 $M(u)\in\Delta_2$，可选 $K>1$ 使得 $u\geqslant v_0$ 时$M\left(\frac{2}{\beta}u\right)\leqslant KM(u)$。我们说明 $\delta=\frac{\varepsilon}{3K}$ 满足定理要求。

设 u，$v\in L_M{}^*$，$\rho_M(u)\leqslant L$，$\rho_M(v)\leqslant\delta$。命 $E=G(|v(t)|\leqslant v_0)$。由 $M(u)$的凸性得

$$\rho_M(u+v)=\int_G M\left\{(1-\beta)u(t)+\beta\left[u(t)+\frac{1}{\beta}v(t)\right]\right\}dt$$

$$\leqslant(1-\beta)\int_G M(u(t))dt+\beta\int_G M\left(\frac{2u(t)+\frac{2}{\beta}v(t)}{2}\right)dt$$

$$<\rho_M(u)+\frac{\beta}{2}\int_G M(2u(t))dt+\frac{\beta}{2}\int_G M\left(\frac{2}{\beta}v(t)\right)dt$$

$$\leqslant \rho_M(u)+\frac{\beta}{2}L_0+\frac{\beta}{2}M\left(\frac{2}{\beta}v_0\right)\text{mes}\,E+\frac{\beta}{2}K\int_{G\setminus E}M(v(t))dt$$

$$\leqslant \rho_M(u)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\beta}{2}K\cdot\delta<\rho_M(u)+\varepsilon$$

再以 $u+v$ 代替 u，$-v$ 代替 v，利用上式可得

$$\rho_M(u)=\rho_M[(u+v)+(-v)]<\rho_M(u+v)+\varepsilon$$

联合这两个不等式即是 (1.44)．

定理 1.34 若 $M(u)\in\Delta_2$，则

(1) $\forall\varepsilon_1>0$，$\exists\,\delta_1>0$ 使 $\|u\|_{(M)}\geqslant\varepsilon_1\Rightarrow\rho_M(u)\geqslant\delta_1$；

(2) $\forall\varepsilon_2\in(0,1)$，$\exists\,\delta_2\in(0,1)$ 使 $\rho_M(u)\leqslant 1-\varepsilon_2\Rightarrow\|u\|_{(M)}\leqslant 1-\delta_2$；

(3) $\forall\varepsilon_3\in(0,1)$，$\exists\,\delta_3\in(0,1)$ 使 $\rho_M(u)\geqslant 1+\varepsilon_3\Rightarrow\|u\|_{(M)}\geqslant 1+\delta_3$．

证 (1) 由定理1.19和定理 1.29 的 (3) 立即可得．

(2) 若不真，则有 $\varepsilon_0>0$，$\{u_n\}\subset L_M^*$ 使 $\|u_n\|_{(M)}\to 1$ 但 $\rho_M(u_n)\leqslant 1-\varepsilon_0$ $(n=1, 2, \cdots)$．不妨认为 $\frac{1}{2}\leqslant\|u_n\|_{(M)}\leqslant 1$ 对所有 $n\geqslant 1$ 成立．因 $M(u)\in\Delta_2$，所以数集 $\{\rho_M(2u_n)\}$ 有上界 L．记 $\frac{1}{\|u_n\|_{(M)}}-1=\alpha_n\geqslant 0$，则 $1\geqslant\alpha_n\to 0$ $(n\to\infty)$．再利用 $M(u)$ 的凸性，有

$$1=\rho_M\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{(M)}}\right)=\rho_M(2\alpha_n u_n+(1-\alpha_n)u_n)$$

$$\leqslant\alpha_n\rho_M(2u_n)+(1-\alpha_n)\rho_M(u_n)$$

$$\leqslant\alpha_n L+(1-\alpha_n)(1-\varepsilon_0)$$

令 $n\to\infty$，得到矛盾结论：$1\leqslant 1-\varepsilon_0<1$．

(3) 的证明与 (2) 相近，请读者自行给出．

下述的定理具有深刻意义，它表明 $M(u)\in\Delta_2$ 时 $L^*_{(M)}$ 的单位球面上的范数收敛与度量收敛等价．

定理 1.35 设 $M(u)\in\Delta_2$．若 $\rho_M(u_n)\to\rho_M(u_0)$ 且 $u_n(t)$

$\xrightarrow{\mu} u_0(t)$（依测度收敛）（$n\to\infty$），那么 $\|u_n-u_0\|_{(M)}\to 0$（$n\to\infty$）.

证 若$u_0=\theta$，则定理自真，今设$u_0\neq\theta$. 由题设，$\{\rho_M(u_n)\}$有界，设L为其上界. 对任给 $\varepsilon>0$，由引理 1.3，存在 $\delta>0$使得 $\rho_M(u)\leqslant L$，$\rho_M(v)\leqslant\delta$ 蕴涵 $|\rho_M(u+v)-\rho_M(u)|<\frac{\varepsilon}{4}$. 不妨认为 $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$.

由积分的绝对连续性，存在 $\delta_1>0$ 使 $G_0\subset G$，$\text{mes}G_0<\delta_1$时 $\int_{G_0}M(u_0(t))dt<\delta$. 因$u_n(t)\xrightarrow{\mu}u_0(t)$，所以存在$n_1$及 $E_n\subset G$，使$n>n_1$ 时，$\text{mes}E_n<\delta_1$ 且

$$\int_{G\setminus E_n}M(u_n(t)-u_0(t))dt<\delta \tag{1.45}$$

注意此时$\int_{E_n}M(u_0(t))dt<\delta<\frac{\varepsilon}{4}$成立，我们有

$$\int_{G\setminus E_n}M(u_0(t))dt=\rho_M(u_0)-\int_{E_n}M(u_0(t))dt>\rho_M(u_0)-\frac{\varepsilon}{4} \tag{1.46}$$

由 (1.45)，(1.46)，$n\geqslant n_1$ 时

$$\int_{G\setminus E_n}M(u_n(t))dt=\int_{G\setminus E_n}M([u_n(t)-u_0(t)]+u_0(t))dt$$

$$>\int_{G\setminus E_n}M(u_n(t))dt-\frac{\varepsilon}{4}>\rho_M(u_0)-\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.47}$$

因 $\rho_M(u_n)\to\rho_M(u_0)$，结合 (1.47)，存在 $n_0\geqslant n_1$ 使 $n\geqslant n_0$时

$$\int_{E_n}M(u_n(t))dt=\rho_M(u_n)-\int_{G\setminus E_n}M(u_n(t))dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

顾及$\int_{E_n} M(u_0(t))dt<\delta$，$n\geq n_0$ 时

$$\int_G M(u_n(t)-u_0(t))dt\leq\int_{G\setminus E_n} M(u_n(t)-u_0(t))dt$$

$$+\int_{E_n} M(|u_n(t)|+|u_0(t)|)dt<\frac{\varepsilon}{4}+\int_{E_n} M(u_n(t))dt+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon$$

这表明 $\rho_M(u_n-u_0)\to 0$．再由 $M(u)\in\Delta_2$，得$\|u_n-u_0\|_{(M)}\to 0$．

§4 有界线性泛函

定理 1.36 E_M 与 $E_{(M)}$上有界线性泛函的一般形式是

$$f(u)=\int_G u(t)v(t)dt \tag{1.48}$$

其中 $v\in L_N^*$．此外还有 $f\in E_M^*$ 时 $\|f\|=\|v\|_{(N)}$；$f\in E^*_{(M)}$时 $\|f\|=\|v\|_N$． 因此，$E_M^*=L^*_{(N)}$；$E^*_{(M)}=L_N^*$．

证 对于任意的$v\in L^*_{(N)}$，显然 (1.48) 定义了E_M 上的一个线性泛函．再由 Hölder 不等式 (1.42)，知$\|f\|\leq\|v\|_{(N)}$．

反之，设$f\in E^*_{M}$．对每一可测集 $E\subset G$，定义 $F(E)=f(\chi_E)$，则 F是可加集函数．今证它绝对连续．对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{M\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$，则 $E\subset G$，$\mathrm{mes}E<\delta$ 时

$$\int_G M\left(\frac{\chi_E(t)}{\varepsilon}\right)dt=M\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathrm{mes}E<\delta\, M\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=1$$

故$\|\chi_E\|_{(M)}\leq\varepsilon$．因而

$$|F(E)|=|f(\chi_E)|\leq\|f\|\cdot\|\chi_E\|_M\leq 2\|f\|\cdot\|\chi_E\|_{(M)}\leq 2\varepsilon\|f\|$$

这就证明了 F绝对连续，从而由 Radon-Nikodym 定理，存在 G 上可积函数 $v_0(t)$使得 $E\subset G$ 可测时

$$F(E)=\int_E v_0(t)dt \tag{1.49}$$

由此可知对任何阶梯函数 $u\in E_M$ 有

$$f(u)=\int_G u(t)v_0(t)dt \tag{1.50}$$

对于任何$u\in L_M^*$，取阶梯函数列 $u_n(t)\xrightarrow{a\cdot e\cdot}u(t)$且使$|u_n(t)|\leqslant|u(t)|$于 G上 $a\cdot e\cdot$成立 $(n=1,2,\cdots)$，则

$$\left|\int_G u(t)v_0(t)dt\right|\leqslant\sup_n\int_G|u_n(t)v_0(t)|dt$$

$$=\sup_n|f(|u_n(t)|\mathrm{sign}v_0(t))|\leqslant\|f\|\sup_n\|u_n\|_M\leqslant\|f\|\cdot\|u\|_M$$

由此立即可知 $v\in L_{(N)}^*$.

对此$v_0\in L^*_{(N)}$，$f_1(u)=\int_G u(t)v_0(t)dt$ 在 E_M 上定义一个有界线性泛函。但对于阶梯函数，f_1 与 f 的值恒同，而阶梯函数全体显然在 E_M 中稠，所以在 E_M 上 $f_1=f$，即 (1.50) 对所有 $u\in E_M$ 成立。

现证$\|f\|=\|v_0\|_{(N)}$。我们已经知道$\|f\|\leqslant\|v_0\|_{(N)}$，今证相反的不等式。不妨设$\|v_0\|_{(N)}=1$。对任意的 $\varepsilon>0$，由(1.41)，$\rho_N((1+\varepsilon)v_0)>1$。令

$$v_n(t)=\begin{cases}|v_0(t)|, & \text{当}|v_0(t)|\leqslant n\text{ 时}\\ 0, & \text{当}|v_0(t)|>n\text{ 时}\end{cases}$$

那么 n 充分大时必有 $\rho_N((1+\varepsilon)v_n)>1$。由于在定理 1.18 的证明中已得到$\|u\|_M\leqslant\rho_M(u)+1\ (u\in L_M^*)$，所以对任何 $n\geqslant1$有

$$\frac{q((1+\varepsilon)v_n)}{\rho_M(q((1+\varepsilon)v_n))+1}\in U(E_M)$$

从而由 (1.11)，对所有充分大的n有

$$\|f\|=\sup_{u\in U(E_M)}\int_G u(t)v_0(t)dt$$

$$\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\int_G\frac{q((1+\varepsilon)v_n(t))(1+\varepsilon)v_n(t)}{\rho_M((1+\varepsilon)v_n)+1}dt$$

$$>\frac{1}{1+\varepsilon}$$

由 ε 的任意性，得 $\|f\|\geqslant\|v_0\|_{(N)}$。

$E_{(\overset{*}{M})}=L_N{}^*$ 的证明留给读者。

推论 1.2 $L_M{}^*$ 自反的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$。

证 充分性由定理立即可得。反之，若 $L_M{}^*$ 自反，则其闭子空间 E_M 也自反，而且有

$$L_M{}^*=(L_M{}^*)^{**}\supset E_{(M)}{}^{**}=(L_{(N)}{}^*)^*\supset E_{(N)}{}^*=L_M{}^*$$

这说明 $L_M{}^*=E_M$。同理 $L_N{}^*=E_N$。即 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$。

当 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$ 时，对每个 $u\in L_M{}^*\backslash E_M$，由Hahn-Banach 定理，存在 $\phi\in(L_M{}^*)^*$,使 $\phi(E_M)=0$ 但 $\phi(u)\neq 0$。显然 $\phi\overline{\in}L^*_{(N)}$，因此，$M(u)\overline{\in}\Delta_2$ 时，$(L_M{}^*)^*\neq L_{(N)}{}^*$。

如果 $L_M{}^*$ 上有界线性泛函 ϕ 满足 $\phi(E_M)=0$，我们就说 ϕ是奇异泛函。

定理 1.37 $L_M{}^*$ 上任何有界线性泛函 f 可以唯一分解为

$$f=v+\phi \tag{1.51}$$

的形式，其中 $v\in L_{(\overset{*}{N})}$，$\phi$ 为奇异泛函。

证 记 $E_M{}^\circ=\{\phi\in(L_M{}^*)^*:\phi(E_M)=0\}$。由泛函分析的一般结果，$E_M{}^*=(L_M{}^*)^*/E_M{}^\circ$，即 $(L_M{}^*)^*=L_{(\overset{*}{N})}\times E_M{}^\circ$。

对于 $L_M{}^*$ 上有界线性泛函，我们记

$$\|f\|_N=\sup\frac{f(u)}{\|u\|_{(M)}},\quad \|f\|_{(N)}=\sup\frac{f(u)}{\|u\|_M}$$

则容易看出$\|f\|_N\geqslant\|f\|_{(N)}$。

定理 1.38 设 $L_M{}^*$ 上有界线性泛函有 (1.51) 的分解，则

$$\|f\|_N=\|v\|_N+\|\phi\|_N \tag{1.52}$$

证 显然$\|f\|_N\leqslant\|v\|_N+\|\phi\|_N$。今证相反的不等式。$\forall\varepsilon>0$，取 u_1，$u_2\in L_M{}^*$，$\|u_1\|_{(M)}=\|u_2\|_{(M)}=1$，使得

$$\|v\|_N-\varepsilon<\int_G u_1(t)v(t)dt,\quad \|\phi\|_N-\varepsilon<\phi(u_2) \tag{1.53}$$

由积分的绝对连续性，$\exists\ \delta>0$使$\text{mes}E<\delta$时$\int_G |u_1(t)v(t)|dt<\varepsilon$.

今取 K充分大，使 $\text{mes}G(|u_1(t)|>K)<\delta$. 再取 $E_1\subset G(u_1(t)\neq 0)$使 $0<\text{mes}E_1<\delta$. 记 $\alpha=\int_{E_1} M(u_1(t))dt$，则显然 $\alpha>0$.

因为$\|u_1\|_{(M)}=\|u_2\|_{(M)}=1$ 蕴涵 $\rho_M(u_1)\leqslant 1$ 和 $\rho_M(u_2)\leqslant 1$，故 N充分大时必有

$$\int_{G(|u_2(t)|>N)} |u_2(t)v(t)|dt<\varepsilon \text{ 且 } \int_{G(|u_2(t)|>N)} M(u_2(t))<\alpha$$

记 $E_2=G(|u_2(t)|>N)$, $E_3=G(|u_1(t)|>K)$, $E_4=G\backslash E_1\cup E_2\cup E_3$，定义

$$u_0(t)=\begin{cases} u_2(t), & t\in E_2 \\ 0, & t\in(E_1\cup E_3)\backslash E_2 \\ u_1(t), & t\in E_4 \end{cases}$$

则由 α 的定义和 E_2 的取法有

$$\rho_M(u_0)\leqslant\int_{E_2} M(u_2(t))dt+\int_{G\backslash E_1} M(u_1(t))dt$$

$$<\alpha+\rho_M(u_1)-\alpha\leqslant 1$$

从而$\|u_0\|_{(M)}\leqslant 1$. 又因 E_1, E_2, E_3 的测度均小于 δ，故

$$\int_G u_0(t)v(t)dt\geqslant\int_{E_4} u_1(t)v(t)dt-\int_{E_2} |u_2(t)v(t)|dt$$

$$\geqslant\int_G u_1(t)v(t)dt-\int_{E_1\cup E_2\cup E_3} |u_1(t)v(t)|dt-\int_{E_2} |u_2(t)v(t)|dt$$

$$>\int_G u_1(t)v(t)dt-3\varepsilon-\varepsilon$$

注意 $u_1\chi_{E_4}\in E_M$, $u_2\chi_{G\backslash E_2}\in E_M$，而 ϕ 为奇异泛函，所以 $\phi(u_0)=\phi(u_2\chi_{E_2})=\phi(u_2)$. 联系 (1.53) 有

$$\|f\|_N\geqslant f(u_0)=\int_G u_0(t)v(t)dt+\phi(u_0)$$

$$>\int_G u_1(t)v(t)dt-4\varepsilon+\phi(u_2)$$

$$>\|v\|_N-5\varepsilon+\|\phi\|_N-\varepsilon$$

由 ε 的任意性，可知$\|f\|_N\geqslant\|v\|_N+\|\phi\|_N$.

下面考虑$\|f\|_{(N)}$. 先证明一个辅助命题.

引理 1.4 对任何奇异泛函 ϕ有

$$\|\phi\|_{(N)}=\|\phi\|_N=\sup_{\rho_M(u)<\infty}\phi(u)$$

证 对给定的 $u\in L_M$, $n\geqslant1$, 记

$$u_n(t)=\begin{cases}u(t), & |u(t)|<n\\ 0, & |u(t)|\geqslant n\end{cases}$$

则 $u_n\in E_M$, $\rho_M(u-u_n)\to0$, 从而 $\varlimsup_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{(M)}\leqslant1$. 又

$$\phi(u)=\phi(u_n)+\phi(u-u_n)=\phi(u-u_n)\leqslant\|\phi\|_{(N)}\|u-u_n\|_M$$

命 $n\to\infty$, 由定理 1.32, 得 $\phi(u)\leqslant\|\phi\|_{(N)}$. 于是由定理 1.29有

$$\|\phi\|_{(N)}=\sup\frac{\phi(u)}{\|u\|_M}\leqslant\sup\frac{\phi(u)}{\|u\|_{(M)}}=\|\phi\|_N$$

$$=\sup_{\rho_M(u)<\infty}\phi(u)\leqslant\sup_{\rho_M(u)<\infty}\phi(u)\leqslant\|\phi\|_{(N)}$$

由定理 1.31, 定理 1.38 和引理 1.4 立即可得:

定理 1.39 $\|f\|_N=\|f\|_{(N)}$的充要条件是 f 为奇异泛函.

定理 1.40 设$L_M{}^*$上有界线性泛函f 有 (1.51) 的分解，则

$$\|f\|_{(N)}=\inf\left\{\xi>0:\ \rho_N\left(\frac{v}{\xi}\right)+\frac{1}{\xi}\|\phi\|_{(N)}\leqslant1\right\}\qquad(1.54)$$

证 对任给 $\xi>0$ 满足 $\rho_N\left(\frac{v}{\xi}\right)+\frac{1}{\xi}\|\phi\|_{(N)}\leqslant1$ 及 $u\in L_M^*$ 满足$\|u\|_M=1$, 由定理 1.27, 存在 k 满足

$$1=\|u\|_M=\frac{1}{k}[1+\rho_M(ku)]$$

从而由 Young 不等式及引理 1.4 有

$$\frac{1}{\xi}f(ku)=\frac{k}{\xi}\int_G u(t)v(t)dt+\frac{1}{\xi}\phi(ku)$$

$$\leqslant \rho_M(ku) + \rho_N\left(\frac{1}{\xi}v\right) + \frac{1}{\xi}\|\phi\|_{(N)}$$

$$\leqslant \rho_M(ku) + 1 \leqslant k$$

故 $f(u) \leqslant \xi$. 考虑到 u 和 ξ 的任意性，可知

$$\|f\|_{(N)} \leqslant \inf\left\{\xi > 0:\ \rho_N\left(\frac{v}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi}\|\phi\|_{(N)} \leqslant 1\right\} \tag{1.55}$$

今证 (1.55) 的不等号不成立，无碍于一般性，设 $\|f\|_{(N)} = 1$. 因此 (1.55) 的不等号成立时，存在某 $\delta > 0$ 使

$$\int_G N(v(t))dt + \|\phi\|_{(N)} > 1 + \delta$$

于是存在 $u_1 \in L_M^*$，$\|u_1\| = 1$ 使 $\rho_N(v) + \phi(u_1) > 1 + \delta$.

注意到 $1 = \|f\|_{(N)} \geqslant \sup\limits_{u \in E_M} \dfrac{f(u)}{\|u\|_M} = \|v\|_{(N)}$，故 $\rho_N(v) \leqslant 1$. 联系 Young 不等式的相等情形蕴涵

$$\rho_N(v) = \int_G [q(|v(t)|)|v(t)| - M(q(|v(t)|))]dt$$

知存在有界可测函数 $u_2(t)$ 使

$$\rho_N(v) - \frac{\delta}{2} < \int_G [u_2(t)v(t) - M(u_2(t))]dt \tag{1.56}$$

仿照定理 1.38 的证明，可以构造 $u_0 \in L_M^*$ 使

$$\int_G u_0(t)v(t)dt + \phi(u_0) - \rho_M(u_0) > \int_G u_2(t)v(t)dt + \phi(u_1)$$
$$- \rho_M(u_2) - \frac{\delta}{2}$$

联系 (1.56) 及 $\rho_N(v) + \phi(u_1) > 1 + \delta$，得

$$\int_G u_0(t)v(t)dt + \phi(u_0) - \rho_M(u_0) > \rho_N(v) + \phi(u_1) - \delta > 1$$

回忆定理 1.26 蕴涵 $\|u_0\|_M \leqslant 1 + \rho_M(u_0)$，得到矛盾结论：

$$1 = \|f\|_{(N)} \geqslant f\left(\frac{u_0}{\|u_0\|_M}\right) = \int_G \frac{u_0(t)}{\|u_0\|_M} v(t)dt + \phi\left(\frac{u_0}{\|u_0\|_M}\right)$$

$$>\frac{1+\rho_M(u_0)}{\|u_0\|_M}\geqslant 1$$

定理获证。

定理 1.41 任何非零奇异泛函ϕ 的范数 $\|\phi\|_{(N)}$在 $L_M{}^*$ 的单位球上不可达。

证 若不然，有 $u\in L_M{}^*$，$\|u\|_M=1$ 使 $\phi(u)=\|\phi\|_{(N)}$。注意到$\|u\|_M>\|u\|_{(M)}$，便有矛盾：

$$\|\phi\|_N=\|\phi\|_{(N)}=\phi(u)\leqslant\|\phi\|_N\|u\|_{(M)}<\|\phi\|_N\|u\|_M\leqslant\|\phi\|_N.$$

定理 1.42 对任意 $L_M{}^*$ 上有界线性泛函 $f=v+\phi$（其中 $v\in L_N{}^*$，ϕ 为奇异泛函），若$\|f\|_{(N)}=1$ 在 $L_M{}^*$ 的单位球上可达，则必有

$$\int_G N(v(t))dt+\|\phi\|_{(N)}=1$$

证 由条件，存在 $u\in L_M{}^*$，$\|u\|_M=1$ 使

$$f(u)=\int_G u(t)v(t)dt+\phi(u)=\|f\|_{(N)}=1$$

注意到 $\|f\|_{(N)}=1$ 蕴涵 $\|v\|_{(N)}\leqslant 1$，因而 $\rho_N(v)\leqslant 1$，所以ξ的函数

$$g(\xi)=\int_G N(\xi v(t))dt+\xi\|\phi\|_{(N)}$$

在[0, 1]上是连续的，于是 $\rho_N(v)+\|\phi\|_{(N)}>1$ 时必有 $\xi_1<1$ 使得

$$1<g(\xi_1)=\rho_N(\xi_1 v)+\xi_1\|\phi\|_{(N)}$$

从而由定理 1.40 得$\|f\|_{(N)}\geqslant\frac{1}{\xi_1}>1$.这与题设$\|f\|_{(N)}=1$不合，故必有

$$\int_G N(v(t))dt+\|\phi\|_{(N)}\leqslant 1$$

由定理 1.40 可知 $\|\phi\|_{(N)}\leqslant\|f\|_{(N)}$。再由定理 1.41 可得 $\int_G u(t)v(t)dt\triangleq d>0$。从而存在 $m>0$ 使得

$$\int_{G\setminus G_m} u(t)v(t)dt > \frac{d}{2}$$

这里 $G_m = G(|v(t)| \geq m)$。因

$$h(\xi) = \int_{G\setminus G_m} N(\xi v(t))dt + \int_{G_m} N(v(t))dt + \|\phi\|_{(N)}$$

是 ξ 的连续函数，故若 $h(1) = \rho_N(v) + \|\phi\|_{(N)} < 1$ 时必存在 $\xi_2 > 1$ 使得 $h(\xi_2) < 1$。定义 $f_0 = v_0 + \phi$，其中

$$v_0(t) = \begin{cases} \xi_2 v(t), & t \in G\setminus G_m \\ v(t), & t \in G_m \end{cases}$$

则由 ξ_2 的选取，$\rho_N(v_0) + \|\phi\|_{(N)} = h(\xi_2) < 1$。于是由定理 1.40 得 $\|f_0\|_{(N)} \leq 1$。但这样一来，就有

$$1 \geq \|f_0\|_{(N)} \geq f_0(u) = \int_G v_0(t)u(t)dt + \phi(u)$$

$$= \xi_2 \int_{G\setminus G_m} u(t)v(t)dt + \int_{G_m} u(t)v(t)dt + \phi(u)$$

$$= f(u) + (\xi_2 - 1)\int_{G\setminus G_m} u(t)v(t)dt$$

$$> 1 + (\xi_2 - 1)\frac{1}{2}d > 1$$

这一矛盾最终完成定理的证明。

定理 1.43 设 $\{G_k\}$ 为 G 的一列两两不交可测子集，$\{u_k\}$ 为一列实数。若 $\chi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \chi_{G_k}(t) \in L_M^* \subset (L^*_{(N)})^*$ 且 $\|u\|_M$ 在 $L^*_{(N)}$ 的单位球上可达，那么存在实数列 $\{v_k\}$ 使得 $v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \chi_{G_k}(t) \in L_{(N)}^*$，$\rho_N(v) = 1$ 且

$$\|u\|_M = \int_G u(t)v(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \mathrm{mes} G_k$$

证 不妨假定 $\mathrm{mes} G_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$。由条件，存在

$v_0 \in L^*_{(N)}$，$\|v_0\|_{(N)}=1$ 使得

$$\|u\|_M=\int_G u(t)v_0(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\int_{G_k}v_0(t)dt$$

命 $v_k=\frac{1}{\text{mes}\,G_k}\int_{G_k}v_0(t)dt$，$v(t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k\chi_{G_k}(t)$，则

$$\|u\|_M=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\int_{G_k}v_0(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}u_kv_k\text{mes}G_k$$

$$=\int_G u(t)v(t)dt$$

今证 $\rho_N(v)=1$。据 Jensen 不等式有

$$\rho_N(v)=\sum_{k=1}^{\infty}N\left(\frac{1}{\text{mes}\,G_k}\int_{G_k}v_0(t)dt\right)\text{mes}G_k$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{G_k}N(v_0(t))dt=\rho_N(v_0)\leqslant\|v_0\|_{(N)}=1$$

但另一方面

$$\|u\|_M=\sup_{\rho_N(w)\leqslant 1}\int_G u(t)w(t)dt=\int_G u(t)v(t)dt$$

故不可能有 $\rho_N(v)<1$。于是必有 $\rho_N(v)=1$。

定理 1.44 设$\{G_k\}$，$\{u_k\}$，$u(t)$满足定理 1.43 的假定。若$\|u\|_{(M)}$在 L_N^* 的单位球上可达，则存在同样形式的 $v\in L_N^*$，$\|v\|_N=1$ 使得

$$\|u\|_{(M)}=\int_G u(t)v(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}u_kv_k\text{mes}G_k$$

证 由题设，存在 $v_0\in L_N^*$，$\|v_0\|_N=1$ 使得

$$\|u\|_{(M)}=\int_G u(t)v_0(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\int_{G_k}v_0(t)dt$$

同样定义$v_k=\frac{1}{\text{mes}\,G_k}\int_{G_k}v_0(t)dt$，$v(t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k\chi_{G_k}(t)$，则只须验

证 $\|v\|_N=1$。任取 $u^*\in L_M{}^*$，$\rho_M(u^*)\leqslant 1$，命

$$u_k'=\frac{1}{\operatorname{mes}G_k}\int_{G_k}u^*(t)dt,\quad u'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'\chi_{G_k}(t)$$

则

$$\int_G v(t)u^*(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}v_k\int_{G_k}u^*(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{G_k}\frac{\int_{G_k}u^*(t)dt}{\operatorname{mes}G_k}v_0(t)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{G_k}u_k'v_0(t)dt=\int_G u'(t)v_0(t)dt$$

又由 Jensen 不等式有

$$\rho_M(u')=\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\frac{1}{\operatorname{mes}G_k}\int_{G_k}u^*(t)dt\right)\operatorname{mes}G_k$$

$$\leqslant\int_G M(u^*(t))dt\leqslant 1$$

从而

$$\int_G v(t)u^*(t)dt=\int_G u'(t)v_0(t)dt\leqslant\|v_0\|_N=1$$

由 $u^*(t)$的任意性，知 $\|v\|_N\leqslant 1$。又$\|u\|_{(M)}=\int_G u(t)v(t)dt$，故不可能有$\|v\|_N<1$。于是有$\|v\|_N=1$。

设$H\subset(L_M{}^*)^*$，$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\subset L_M{}^*$。如果对每个$f\in H$，$f(u_n-u_m)\to 0(n,\ m\to\infty)$，就说 $\{u_n\}$ 是 H-弱基本列。若对每个 $f\in H$，$f(u_n)\to f(u_0)(n\to\infty)$，就说$\{u_n\}$是 H-弱收敛于 u_0。如果$L_M{}^*$的每个 H－弱基本列都H－弱收敛，则称 L_{M*} 是H－弱序列完备的。

由 Banach 空间的一般理论，$L_M{}^*$ 总是 E_N－弱序列完备的，但是我们有更进一步的结论。

定理 1.45 $L_M{}^*$ 是 $L_N{}^*$－弱序列完备的。

证 若不然，有 $L_M{}^*$ 中 $L^*{}_N$－弱基本列$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是L_N^*－

弱收敛的。因 $L_M{}^*$ 是 E_N－弱序列完备的，故存在 $u_0 \in L_M{}^*$，使 $\{u_n\}E_N$－弱收敛于 u_0。由于 $\{u_n\}$ 不是 $L_N{}^*$－弱收敛的，故存在 $v \in L_N{}^*$ 使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_G [u_n(t)-u_0(t)]v(t)dt\right|>0$$

无碍于一般性，假定

$$\lim_{n\to\infty}\int_G [u_n(t)-u_0(t)]v(t)dt=\varepsilon_0>0 \tag{1.57}$$

由共鸣定理，ε_0 是一有限数。记 $w_n(t)=u_n(t)-u_0(t)$，取 n_1 使得 $\int_G w_{n_1}(t)v(t)dt>\frac{5}{6}\varepsilon_0$，再取 m_1 使得

$$\int_{G\setminus G_{m_1}} |w_{n_1}(t)v(t)|dt<\frac{1}{6}\varepsilon_0$$

这里 $G_m=G(|v(t)|<m)(m=1,2,\cdots)$。于是

$$\int_{G_{m_1}} w_{n_1}(t)v(t)dt=\int_G-\int_{G\setminus G_{m_1}}>\frac{5}{6}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0>\frac{1}{2}\varepsilon_0$$

因为 $v\chi_{G_{m_1}}\in E_N$，$\{w_n\}$ 是 E_N－弱收敛于零的，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{G_{m_1}} w_n(t)v(t)dt=0$。顾及（1.57）便知存在 $n_2>n_1$ 使得

$\int_G w_{n_2}(t)v(t)dt>\frac{5}{6}\varepsilon_0$ 且

$$\left|\int_{G_{m_1}} w_{n_2}(t)v(t)dt\right|<\frac{1}{6}\varepsilon_0$$

选 $m_2>m_1$ 使

$$\int_{G\setminus G_{m_2}} |w_{n_2}(t)v(t)|dt<\frac{1}{6}\varepsilon_0$$

$$\int_{G_{m_2}\setminus G_{m_1}} w_{n_2}(t)v(t)dt=\int_G-\int_{G_{m_1}}-\int_{G\setminus G_{m_2}}<\frac{5}{6}\varepsilon_0$$

$$-\frac{1}{6}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0=\frac{1}{2}\varepsilon_0$$

注意$\{w_n\}E_N$－弱收敛于零，$v\chi_{G_{m_1}}\pm v\chi_{G_{m_2}\setminus G_{m_1}}\in E_N$，结合(1.57)知存在 $n_3>n_2$ 使得$\int_G w_{n_3}(t)v(t)dt>\frac{5}{6}\varepsilon_0$ 且

$$\left|\int_{G_{m_1}} w_{n_3}(t)v(t)dt\pm\int_{G_{m_2}\setminus G_{m_1}} w_{n_3}(t)v(t)dt\right|<\frac{1}{6}\varepsilon_0 \quad (1.58)$$

取 $m_3>m_2$ 使

$$\int_{G\setminus G_{m_3}} |w_{n_3}(t)v(t)|dt<\frac{1}{6}\varepsilon_0$$

顾及 (1.58)，又有

$$\int_{G_{m_3}\setminus G_{m_2}} w_{n_3}(t)v(t)dt=\int_G-\int_{G\setminus G_{m_3}}-\int_{G_{m_2}}>\frac{5}{6}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0$$

$$-\frac{1}{6}\varepsilon_0=\frac{1}{2}\varepsilon_0$$

如此下去，由归纳法，可选$\{n_i, m_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$\left|\left[\int_{G_{m_1}}+\varepsilon_2\int_{G_{m_2}\setminus G_{m_1}}+\varepsilon_3\int_{G_{m_3}\setminus G_{m_2}}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varepsilon_{i-1}\int_{G_{m_{i-1}}\setminus G_{m_{i-2}}}\right]w_{n_i}(t)v(t)dt\right|<\frac{1}{6}\varepsilon_0 \quad (1.59)$$

(其中 ε_k 为 +1 或 −1, $k=2, 3, \cdots, i-1$)

$$\int_{G\setminus G_{m_i}} |w_{n_i}(t)v(t)|dt<\frac{1}{6}\varepsilon_0 \quad (1.60)$$

以及

$$\int_{G_{m_i}\setminus G_{m_{i-1}}} w_{n_i}(t)v(t)dt>\frac{1}{2}\varepsilon_0 \quad (1.61)$$

$i=1, 2, \cdots$. 这里规定 $G_{m_{-1}}=G_{m_0}=\phi$. 定义

$$v_0(t)=\begin{cases} v(t), & t\in G_{m_{2k+1}}\setminus G_{m_{2k}} \\ -v(t) & t\in G_{m_{2k}}\setminus G_{m_{2k-1}} \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

易见 $v_0\in L^*_N$. 又由 (1.59), (1.60), (1.61) 有

$$\begin{aligned}
&\int_G [u_{n_{2k+1}}(t)-u_{n_{2k}}(t)]v_0(t)dt \\
&=\int_G [w_{n_{2k+1}}(t)-w_{n_{2k}}(t)]v_0(t)dt \\
&\geqslant \int_{G_{m_{2k+1}}\setminus G_{m_{2k}}} w_{n_{2k+1}}(t)v(t)dt \\
&\qquad + \int_{G_{m_{2k}}\setminus G_{m_{2k-1}}} w_{n_{2k}}(t)v(t)dt \\
&-\frac{1}{6}\varepsilon_0+\int_{G\setminus G_{m_{2k+1}}} w_{n_{2k+1}}(t)v_0(t)dt-\frac{1}{6}\varepsilon_0 \\
&\qquad -\int_{G\setminus G_{m_{2k}}} w_{n_{2k}}(t)v_0(t)dt \\
&>\frac{1}{2}\varepsilon_0+\frac{1}{2}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0-\frac{1}{6}\varepsilon_0=\frac{1}{3}\varepsilon_0
\end{aligned}$$

与$\{u_n\}$为 L_N^*－弱基本列矛盾.

定理 1.46 L_M^* 弱序列完备的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$.

证 充分性由定理1.45立即可知. 今证必要性. 若 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$, 则存在 $u\in L_M^*\setminus E_M$. 定义

$$u_n(t)=\begin{cases} u(t), & |u(t)|<n \\ 0, & |u(t)|\geqslant n \end{cases}$$

$n=1, 2, \cdots$. 对任意 $f\in(L_M^*)^*$, 则 f 有 (1.51) 的分解 $f=v+\phi$. 对任何自然数 n, p, 因 u_n, $u_{n+p}\in E_M$, ϕ 为奇异泛函,

故

$$|f(u_n - u_{n+p})| = |\int_G [u_n(t) - u_{n+p}(t)]v(t)dt|$$

$$\leqslant \int_G |[u_n(t) - u(t)]v(t)|dt \to 0$$

$(n\to\infty)$.这说明$\{u_n\}$为弱基本列. 又因为$\{u_n(t)\}$处处收敛于$u(t)$，故若它弱收敛，则必弱收敛于$u(t)$.但另一方面，由Hahn-Banach 定理，存在$\phi_0 \in (L_M^*)^*$使 $\phi_0(E_M)=0$， $\phi_0(u)\neq 0$. 于是

$$\phi_0(u-u_n) = \phi_0(u) \neq 0$$

与$\{u_n\}$的弱收敛性矛盾.

附记. 本章的大部分内容取材于参考文献[1], [2].从[2]中所选取的定理 1.27 ，最早见于吴从炘、赵善中、陈俊澳的[3]，定理 1.12 选自参考文献[2]，但所用的比较整齐的证明属于陈述涛. 定理 1.28,1.30,1.32,1.33,1.35,1.41,1.42,1.44见陈述涛、王玉文的[4]，[5] 和 [6]. 引理 1.3 参看 A. Kaminska 的[7]. 定理1.43 属于 H.W.Milnes[8].定理1.46最初见于[9]，P440. 定理 1.45 及定理 1.46 的证明取自王玉文的[10]. 定理 1.36 中$\|f\|\geqslant\|v_0\|_{(N)}$的证明是任重道[11]给出的.

参 考 文 献

[1] M.A.Красносeлвский,Я. Б. Рутицкий,《凸函数和奥尔里奇空间》（吴从炘译），科学出版社（1962）.

[2] 吴从炘、王廷辅，《奥尔里奇空间及其应用》，黑龙江科技出版社（1983）.

[3] 吴从炘、赵善中、陈俊澳，关于 Orlicz 空间范数的计算公式与严格赋范的条件，哈尔滨工业大学学报，（1978），no.2，1—12.

[4] 陈述涛， Smoothness of Orlicz Spaces, Comment.

Math.（待发表）.
〔5〕 ——, Some rotundities of Orlicz spaccs with Orlicz norm（待发表）.
〔6〕 陈述涛、王玉文，H-property of Orlicz spaces,数学年刊（待发表）.
〔7〕 A.Kaminska, On uniform convexity of Orlicz spaces Indag.Math.,A85 (1982), 27—36.
〔8〕 H.W.Milnes, Convexity of Orlicz spaces, Pacific J. Math.,7 (1957), 1451—1486.
〔9〕 Г.В.Канторович,Г.П.Акилов,《泛函分析（上）》（刘证、郑权、张云生译），高等教育出版社（1984）.
〔10〕 王玉文，Orlicz 空间的弱序列完备性,东北数学，1(1985) no.2, 241—246.
〔11〕 任重道，Anote on the Luxemburg norm of Orlicz spaces（待发表）.

第二章　凸性与光滑性

凸性和光滑性具有鲜明的直观几何意义，是 Banach 空间几何理论基本内容之一. 对于这些几何属性的研究，有助于进一步揭示空间自身的结构，在逼近论，控制论和概率论等方面也有重要应用. 本章重点介绍Orlicz空间的端点、严格凸、（弱）一致凸、K一致凸、（弱）局部一致凸、H严格凸、中点局部一致凸、各向一致凸和光滑等性质，其中绝大部分内容都是最新成果.

§1　端点与严格凸

定义2.1　设 $M(u)$ 为N函数，u_0 为实数. 如果对任何二不同实数 v,w，只要 $\frac{v+w}{2}=u_0$，就有 $M(u_0)<\frac{1}{2}M(v)+\frac{1}{2}M(w)$

$$\tag{2.1}$$

就说 u_0 是 $M(u)$ 的一个严格凸点. $M(u)$ 的严格凸点全体记为 S_M.

显然，$u_0\in S_M$ 的充要条件是对任何不同实数 v,w 和 $a\in(0,1)$，只要 $u_0=av+(1-a)w$，就有

$$M(u_0)<aM(v)+(1-a)M(w) \tag{2.1'}$$

如果 $u_0\overline{\in}S_M$，则 $M(u)$ 必在以 u_0 为内点的某开区间上的图形为直线段，于是 S_M 的余集为至多可列个互不相交开区间的并.

很明显，$M(u)$ 严格凸的充要条件是 S_M 为全体实数. 此外由 $M(0)=0$，$u\neq0$ 时 $M(u)>0$ 可知 $0\in S_M$. 再由 $\lim\limits_{u\to0}\frac{M(u)}{u}=0$，$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$ 可知在零点附近和无穷远点附近都有无穷多个 $M(u)$ 的严格凸点.

定理 2.1　$u\in S(L^*_{(M)})$ 为 $U(L^*_{(M)})$ 的端点的充要条件是 (1)

$\rho_M(u)=1$；(2) $\operatorname{mes}G(u(t)\overline{\in}S_M)=0$.

证 充分性. 对任何 $v,w\in U(L^*_{(M)})$, $u=\frac{v+w}{2}$, 因$\rho_M(v)\leqslant 1$, $\rho_M(w)\leqslant 1$, 所以

$$1=\rho_M(u)=\int_G M\left(\frac{v(t)+w(t)}{2}\right)dt$$

$$\leqslant\int_G \frac{M(v(t))+M(w(t))}{2}dt\leqslant 1$$

联系 $M(u)$ 的凸性，可见对几乎所有的 t 有

$$M(u(t))=M\left(\frac{v(t)+w(t)}{2}\right)=\frac{1}{2}M(v(t))+\frac{1}{2}M(w(t))$$

但$\operatorname{mes}G(u(t)\overline{\in}S_M)=0$，故上式对几乎所有满足$v(t)\neq w(t)$的$t$都不能成立.因此必几乎处处有$v(t)=w(t)$，即$v=w=u$，从而充分性得证.

必要性.设u为$U(L^*_{(M)})$的端点.若(1) 不真，则$\varepsilon=1-\rho_M(u)>0$.取 $a>0$ 使$\operatorname{mes}(0<|u(t)|\leqslant a)>0$.再取$E\subset G(0<|u(t)|\leqslant a)$使 $\operatorname{mes}E>0$ 且 $\int_E M(2u(t))dt\leqslant\varepsilon$.命

$$(v(t),\ w(t))=\begin{cases}(u(t),u(t),)\ t\in G\backslash E\\(0,2u(t)),\ t\in E\end{cases}$$

则容易看出 $u(t)=\frac{v(t)+w(t)}{2}$ 且由 $\operatorname{mes}E>0$ 及$u(t)$在E上处处不为零知$v\neq w$。又

$$\rho_M(v)<\rho_M(w)=\int_{G\setminus E}M(u(t))dt+\int_E M(2u(t))dt$$

$$<\rho_M(u)+\varepsilon=1$$

故$\|v\|_{(M)}\leqslant 1$, $\|w\|_{(M)}\leqslant 1$.这与u为$U(L^*_{(M)})$的端点相矛盾.

(2) 若 $\operatorname{mes}G(u(t)\overline{\in}S_M)>0$,则因$S_M$的余集为至多可列个

开区间的并集，必存在某开区间 (a,b) 与 S_M 不交，即 $M(u)$ 在 $[a,b]$ 上为线性：$M(u)=pu+q$ 使得 $\mathrm{mes}G(u(t)\in(a+\varepsilon,b-\varepsilon))>0$ ($\varepsilon>0$为一常数) 将集合 $G(u(t)\in(a+\varepsilon,b-\varepsilon))$分解为两个不相交的等测度集 A_1,A_2，然后定义

$$(v(t),\ w(t))=\begin{cases}(u(t),u(t)), & t\in G\setminus(A_1\cup A_2)\\ (u(t)-\varepsilon,u(t)+\varepsilon), & t\in A_1\\ (u(t)+\varepsilon,u(t)-\varepsilon), & t\in A_2\end{cases}$$

显然 $u(t)=\dfrac{v(t)+w(t)}{2}$ 且由 $\mathrm{mes}A_1=\mathrm{mes}A_2>0$ 可知 $v\neq w$.

又

$$\int_{A_1\cup A_2}M(v(t))dt=\int_{A_1}[p\cdot(u(t)-\varepsilon)+q]dt+\int_{A_2}[p(u(t)+\varepsilon)+q]dt$$

$$=\int_{A_1\cup A_2}[p\cdot u(t)+q]dt=\int_{A_1\cup A_2}M(u(t))dt$$

由此即得$\rho_M(v)=\rho_M(u)\leqslant1$.同理 $\rho_M(w)=\rho_M(u)\leqslant1$，故 $v,w\in U(L^*_{(M)})$，与u 为$U(L^*_{(M)})$的端点冲突.

定理 2.2 $L^*_{(M)}$严格凸的充要条件是 (1) $M(u)\in\Delta_2$; (2) $M(u)$ 严格凸.

证 充分性. 由定理1.28的 (1)，$M(u)\in\Delta_2$ 时对于一切 $u\in S(L^*_{(M)})$有$\rho_M(u)=1$.又$M(u)$严格凸时 S_M 的余集是空集，故由定理2.1,$S(L^*_{(M)})$中每一点都是$U(L^*_{(M)})$的端点，即 $L^*_{(M)}$严格凸.

必要性. 据定理1.28的 (1) 和定理2.1，显然 (1) 是必要的.今证(2).若 $M(u)$ 不严格凸，则存在 $u_0\overline{\in}S_M$，$u_0\neq0$，取 $E\subset G$使 $0<\mathrm{mes}E<\mathrm{mes}G$且满足 $M(u_0)\mathrm{mes}E\leqslant1$，再选 $u_1\geqslant0$ 使

$M(u_1)\text{mes}(G\backslash E)=1-M(u_0)\text{mes}E$. 定义 $u(t)=u_0\chi_E(t)+u_1\chi_{G\backslash E}(t)$, 则容易计算出 $\rho_M(u)=1$, 因而 $\|u\|_{(M)}=1$. 但 $\text{mes}G(u(t)\overline{\in}S_M)\geqslant\text{mes}E>0$, 故由定理2.1, u 不是 $U(L^*_{(M)})$ 的端点, 这与$L^*_{(M)}$的严格凸性不相容.

定理 2.3 $u\in S(L^*_M)$ 为$U(L^*_M)$的端点的充要条件是对任何 $k\in[k^*,k^{**}]$, 有 $\text{mes}G(ku(t)\overline{\in}S_M)=0$.
(k^*,k^{**}的定义见 (1.37))

证 充分性. 对任何$v,w\in U(L^*_M)$, $u=\dfrac{v+w}{2}$, 显然必有 $\|v\|_M=\|w\|_M=1$, 取 k_1,k_2使得

$$1=\|v\|_M=\frac{1}{k_1}\left[1+\int_G M(k_1v(t))dt\right]$$

$$1=\|w\|_M=\frac{1}{k_2}\left[1+\int_G M(k_2w(t))dt\right]$$

记 $k=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ 由$M(u)$ 的凸性和定理 1.26 有

$$2=\|v\|_M+\|w\|_M=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\left[1+\frac{k_2}{k_1+k_2}\int_G M(k_1v(t))\,dt\right.$$

$$\left.+\frac{k_1}{k_1+k_2}\int_G M(k_2w(t))dt\right]\geqslant\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(kv(t)+kw(t))dt\right]$$

$$=2\frac{1}{2k}\left[1+\int_G M(2ku(t))\,dt\right]\geqslant 2\|u\|_M=2 \tag{2.2}$$

所以 (2.2) 中所有各式都相等. 于是

$$\frac{1}{2k}\left[1+\int_G M(2ku(t))dt\right]=1=\|u\|_M \tag{2.3}$$

且对几乎所有 t 有

$$\frac{k_2}{k_1+k_2}M(k_1v(t))+\frac{k_1}{k_1+k_2}M(k_2w(t))=M(2ku(t)) \tag{2.4}$$

由定理 1.27，(2.3) 式意味着 $2k\in[k^*,k^{**}]$，从而由已知条件，$\mathrm{mes}G(2ku(t)\overline{\in}S_M)=0$。再根据(2.4) 式，对几乎所有的$t\in G$有 $k_1v(t)=k_2w(t)$，即 $k_1v=k_2w$。由此又有 $k_1=\|k_1v\|_M=\|k_2w\|_M=k_2$，因而 $v=w$。这说明 u 必为 $U(L_M^*)$的端点。

必要性。若有$k\in[k^*,k^{**}]$ 使得 $\mathrm{mes}G(ku(t)\overline{\in}S_M)>0$，完全仿照定理2.1必要性 (2) 的作法，可造出v，w，$v\neq w$，$u=\frac{v+w}{2}$ 且 $\int_G M(kv(t))dt=\int_G M(kw(t))dt$。于是

$$\|v\|_M\leqslant\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(kv(t))\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[1+\int_G M(ku(t))dt\right]=\|u\|_M=1$$

同理 $\|w\|_M\leqslant1$。与u为$U(L_M^*)$的端点矛盾。

定理 2.4 L_M^*严格凸的充要条件是$M(u)$严格凸。

证 充分性由定理2.3立即可得。今证必要性。若 $M(u)$非严格凸，便有$u_0\overline{\in}S_M$。取$E_1\subset G$使得$0<\mathrm{mes}E_1<\mathrm{mes}G$ 且 $N[p(|u_0|)]\mathrm{mes}E_1\leqslant1$。再取 $u_1>0$ 使得 $N[p(u_1)]\mathrm{mes}(G\backslash E_1)\geqslant1$。然后选 $E_2\subset G\backslash E_1$ 满足

$$N(p(u_1))\mathrm{mes}E_2=1-N(p(|u_0|))\mathrm{mes}E_1 \tag{2.5}$$

命

$$k=p(|u_0|)|u_0|\mathrm{mes}E_1+u_1p(u_1)\mathrm{mes}E_2 \tag{2.6}$$

定义 $u(t)=\frac{|u_0|}{k}\chi_{E_1}(t)+\frac{u_1}{k}\chi_{E_2}(t)$，则由 (2.5)

$$\int_G N[p(ku(t))]dt=\int_{E_1}N[p(|u_0|)]dt+\int_{E_2}N[p(u_1)]\,dt=1 \tag{2.7}$$

从而据定理1.25和 (2.6) 有

$$\|u\|_M=\int_G u(t)p(ku(t))dt=p(|u_0|)\frac{|u_0|}{k}\text{mes}E_1$$

$$+p(u_1)\ \frac{u_1}{k}\text{mes}E_2=1$$

再由（2.7）和定理1.25的证明可知 $\|u\|_M=\frac{1}{k}[1+\rho_M(ku)]$，

故 $k\in[k^*,k^{**}]$.但

$$\text{mes}G(ku(t)\overline{\in}S_M)\geqslant\text{mes}E_1>0$$

由定理2.3，u不是$U(L_M^*)$的端点.矛盾.

推论 2.1 （1） 对任何 $\varepsilon>0$，L_M^*可赋严格凸 Orlicz 范数 $\|\cdot\|_M$使它满足$\|u\|_M\leqslant\|u\|_{M_1}\leqslant(1+\varepsilon)\|u\|_M$ $(u\in L_M^*)$；

（2） $M(u)\in\Delta_2$ 时 $L_{(M)}^*$ 可赋等价严格凸范数$\|\cdot\|_{(M_2)}$使得它的共轭空间也严格凸.

证 （1）由定理1.10、定理1.30和定理 2.4 可以获证.（2）可由定理1.11、定理1.30、定理1.33、定理2.2和定理2.4得到.

§2 一致凸和 K 一致凸

定理 2.5 下述命题等价

（1） $M(u)\in\Delta_2$ 且 $M(u)$ 一致凸；

（2） $L_{(M)}^*$ 一致凸；

（3） $L_{(M)}^*$ k 一致凸 $(k\geqslant2)$.

证 （1）⇒（2） 给定 $h>0$，须寻求 $\delta>0$ 使得 $f,g\in S(L_{(M)}^*)$，$\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{(M)}\geqslant h$ 蕴涵 $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{(M)}\leqslant1-\delta$.因为 $M(u)\in\Delta_2$,由定理1.34,只须寻求$\delta>0$使得 $\rho_M\left(\frac{f-g}{2}\right)\geqslant h$ 蕴涵

$$\rho_M\left(\frac{f+g}{2}\right)\leqslant 1-\delta.$$

对此h，选 $u_0>0$ 使 $M(u_0)\text{mes}G<\frac{h}{3}$并命 $\varepsilon=\frac{h}{3}$．由于$M(u)$一致凸，对于上述u_0和ε，存在 $\delta'>0$ 使得 $|u-v|\geqslant\varepsilon\max(|u|,|v|)\geqslant\varepsilon u_0$ 时

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\left(1-\delta'\right)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

我们验证 $\delta=\frac{1}{3}h\delta'$ 满足要求．

对任给 $f,g\in S(L^*_{(M)})$，$\rho_M\left(\frac{f-g}{2}\right)\geqslant h$，记

$$G_1=G(\max(|f(t)|,|g(t)|)<u_0)$$
$$G_2=G(|f(t)-g(t)|<\varepsilon\max(|f(t)|,|g(t)|))$$
$$G_3=G(|f(t)-g(t)|\geqslant\varepsilon\max(|f(t)|,|g(t)|)\geqslant\varepsilon u_0)$$

因 $\varepsilon=\frac{h}{3}<1$，由 G_2 的定义有

$$\int_{G_2}M\left(\frac{f(t)-g(t)}{2}\right)dt\leqslant\int_{G_2}M\left(\varepsilon\frac{|f(t)|+|g(t)|}{2}\right)dt$$

$$\leqslant\varepsilon\int_{G_2}\frac{M(f(t))+M(g(t))}{2}dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}[\rho_M(f)+\rho_M(g)]=\varepsilon=\frac{h}{3}$$

于是

$$h\leqslant\int_G M\left(\frac{f(t)-g(t)}{2}\right)dt\leqslant M(u_0)\text{mes}G_1+\frac{h}{3}$$

$$+\int_{G_3}\frac{M(f(t))+M(g(t))}{2}dt$$

从而有

$$\int_{G_3}\frac{M(f(t))+M(g(t))}{2}dt>\frac{h}{3}$$

联系G_3和δ'的定义有

$$\rho_M\left(\frac{f+g}{2}\right) \leqslant \int_{G_1 \cup G_2} \frac{M(f(t))+M(g(t))}{2}dt + (1-\delta')$$

$$\int_{G_3} \frac{M(f(t))+M(g(t))}{2}dt < \frac{\rho_M(f)+\rho_M(g)}{2} - \frac{1}{3}h\delta' = 1-\delta$$

(2) ⇒ (3) 乃是一般 Banach 空间的结果.

(3) ⇒ (1) 因k一致凸蕴涵自反，故$M(u) \in \Delta_2$. 若 $M(u)$ 非一致凸，则存在 $\varepsilon>0, u_0>0$和实数u_n, v_n满足 $|u_n - v_n| \geqslant \varepsilon \max(|u_n|, |v_n|) \geqslant \varepsilon u_0$使得

$$M\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) > \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2} \tag{2.8}$$

$n=1,2,\cdots$.不失一般性，设 $2a = M(\varepsilon u_0)\frac{1}{k+1}\text{mes}G \leqslant 2$ 且 $u_n > v_n \geqslant 0$ 对所有 n 成立. 因此时有 $u_n \geqslant \varepsilon u_0$，故

$$[M(u_n)+kM(w_n)]\frac{1}{k+1}\text{mes}G \geqslant M(\varepsilon u_0)\frac{1}{k+1}\text{mes}G = 2a$$

于是存在 $G^{(n)} \subset G$使 $0 < \text{mes}G^{(n)} < \text{mes}G$且

$$[M(u_n)+kM(w_n)]\frac{1}{k+1}\text{mes}G^{(n)} = a \leqslant 1$$

这里$w_n = \frac{1}{2k}[(k-1)u_n + (k+1)v_n]$ $(n=1,2,\cdots)$. 今选 $d_n \geqslant 0$使得

$$M(d_n)\text{mes}G \backslash G^{(n)} = 1 - [M(u_n)+kM(w_n)]\frac{1}{k+1}\text{mes}G^{(n)} \tag{2.9}$$

记 $C_n = \frac{1}{k+1}\text{mes}G^{(n)}$并将$G^{(n)}$依测度等分为$k+1$个两两不交可测子集$\left\{G_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{k+1}$，然后定义

$$x_1^{(n)}(t) = \sum_{m=1}^{k} w_n \chi_{G_m^{(n)}}(t) + u_n \chi_{G_{k+1}^{(n)}}(t) + d_n \chi_{G \backslash G^{(n)}}(t)$$

$$x_i^{(n)}(t) = \sum_{m \neq i-1} w_n \chi_{G_m^{(n)}}(t) + u_n \chi_{G_{i-1}^{(n)}}(t) + d_n \chi_{G \backslash G^{(n)}}(t)$$

$(n=1,2,\cdots;\ i=2,3,\cdots,k+1)$.由 (2.9) 式有

$$\rho_M(x_i^{(n)}) = [M(u_n)+kM(w_n)]C_n + M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)} = 1$$

所以 $\|x_i^{(n)}\|_{(M)}=1 \quad (n=1,2,\cdots; i=1,2,\cdots,k+1)$. 再由 (2.8) 式得

$$\rho_M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} x_i^{(n)}\right) = (k+1)M\left(\frac{kw_n+u_n}{k+1}\right)C_n +$$

$$+M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)}$$

$$=(k+1)M\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)C_n + M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)}$$

$$\geqslant (k+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)C_n\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2} + M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)} \tag{2.10}$$

又由 (2.9) 和 Jensen 不等式

$$1=\left[M(u_n)+kM\left(\frac{(k-1)u_n+(k+1)v_n}{2k}\right)\right]C_n +$$

$$M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)}$$

$$\leqslant\{M(u_n)+\frac{k}{2k}[(k-1)M(u_n)+(k+1)M(v_n)]\}C_n +$$

$$+M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)}$$

$$=(k+1)C_n\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2} + M(d_n)\mathrm{mes}G\setminus G^{(n)} \tag{2.11}$$

代入 (2.10) 式，得

$$\rho_M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} x_i^{(n)}\right)\geqslant 1-\frac{1}{n}$$

因而 $\quad \left\|\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} x_i^{(n)}\right\|_{(M)} \geqslant 1-\frac{1}{n}\longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$

今取 $a_n>0$ 使得 $\|a_n\chi_{G_i^{(n)}}\|_N=1$，则由特征函数的范数计算公式，$a_n=\dfrac{1}{C_nM^{-1}\left(\frac{1}{C_n}\right)}(n=1,2,\cdots,)$. 定义 L_M^* 上有界线性泛函

$$g_i^{(n)}: g_i^{(n)}(x)=\int_G x(t)a_n\chi_{G_i^{(n)}}(t)dt \qquad (x\in L_M^*)$$

则 $\|g_i^{(n)}\|_N=1$ $(n=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,k)$。今估算

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1^{(n)}(x_1^{(n)}) & g_1^{(n)}(x_2^{(n)}) & \cdots & g_1^{(n)}(x_{k+1}^{(n)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_k^{(n)}(x_1^{(n)}) & g_k^{(n)}(x_2^{(n)}) & \cdots & g_k^{(n)}(x_{k+1}^{(n)}) \end{vmatrix}$$

将这行列式的每一列依次减去第一列再按第一行展开，得

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} (u_n-w_n)a_nC_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (u_n-w_n)a_nC_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (u_n-w_n)a_nC_n \end{vmatrix}$$

$$=\left|(u_n-w_n)a_nC_n\right|^k=\left[\frac{k+1}{2k}(u_n-v_n)a_nC_n\right]^k$$

$$\geqslant\left[\frac{k+1}{2k}\varepsilon u_na_nC_n\right]^k$$

又由 (2.11) 和 (2.9) 式得

$$(k+1)C_nM(u_n)\geqslant 1-M(d_n)\mathrm{mes}G\backslash G^{(n)}=a$$

故由 $0<a\leqslant 1$ 有 $C_nM\left(\frac{k+1}{a}u_n\right)\geqslant 1$ 或即 $\frac{k+1}{a}u_n\geqslant M^{-1}\left(\frac{1}{C_n}\right)$

于是

$$\Delta_n\geqslant\left[\frac{\varepsilon a}{2k}M^{-1}\left(\frac{1}{C_n}\right)a_nC_n\right]^k=\left[\frac{\varepsilon a}{2k}\right]^k$$

$(n=1,2,\cdots)$.这与 (3) 矛盾.

定理 2.6 下列说法等价

(1) $M(u)\in\Delta_2$ 且 $M(u)$一致凸;

(2) L_M^* 一致凸;

(3) L_M^* k-一致凸 $(k\geqslant 2)$.

证 (1) ⇒ (2) 由模空间[18]的理论，$\|\cdot\|_{(M)}$与$\|\cdot\|_M$恰为模范数和相伴范数，据Ando[18]的一般原理，这两个范数的一致凸性是等价的，因此，由定理2.5得 (1) ⇒ (2)(读者也可以应用第一章的知识直接验证之)。

(2) ⇒ (3) 是无需验证的，以下证明(3) ⇒ (1)。

观察引理1.1的证明，不难看出，如果对任意$\varepsilon>0$，$u_0>0$，存在 $K>1$ 使得

$$p((1+\varepsilon)t)\geqslant Kp(t) \qquad (t\geqslant u_0)$$

则$M(u)$是一致凸的（事实上，它的逆命题也是成立的）。因此，如果$M(u)$不是一致凸的，则存在 $\varepsilon>0$，$u_0>0$及$u_n\geqslant u_0$使

$$p((1+\varepsilon)u_n)<\left(1+\frac{1}{n}\right)p(u_n) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{2.12}$$

取 $G_0\subset G$ 使 $0<\mathrm{mes}G_0<\mathrm{mes}G$ 且

$$0<N(p(u_0))\mathrm{mes}G_0\leqslant 1$$

再取 $G^{(n)}\subset G_0$ 使

$$1\geqslant[kN(p(u_n))+N(p((1+\varepsilon)u_n))]\frac{1}{k+1}\ \mathrm{mes}G^{(n)}$$
$$\geqslant N(p(u_0))\mathrm{mes}G_0 \tag{2.13}$$

于是可选 w_n 充分大及$F_n\subset G\backslash G_0$ 使得

$$[kN(p(u_n))+N(p((1+\varepsilon)u_n))]\ \frac{1}{k+1}\mathrm{mes}G^{(n)}$$
$$+N(p(w_n))\mathrm{mes}F_n=1 \tag{2.14}$$

记

$$k_n=[ku_np(u_n)+p((1+\varepsilon)u_n)(1+\varepsilon)u_n]\frac{1}{k+1}\mathrm{mes}G^{(n)}$$
$$+p(w_n)w_n\mathrm{mes}F_n \tag{2.15}$$

并将$G^{(n)}$按测度等分为$k+1$个子集：$\{G_i^{(n)}\}_{i=1}^{k+1}$，然后定义

$$x_1^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k_n}u_n\chi_{G_i^{(n)}}(t)+\frac{1}{k_n}\ (1+\varepsilon)u_n\chi_{G_{k+1}^{(n)}}(t)+$$
$$+\frac{1}{k_n}w_n\chi_{F_n}(t)$$

$$x_i^{(n)}(t) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{k_n} u_n \chi G_j^{(n)}(t) + \frac{1}{k_n}(1+\varepsilon) u_n \chi G_i^{(n)}(t) +$$

$$\frac{1}{k_n} w_n \chi_{F_n}(t)$$

$(n=1,2,\cdots;\ i=2,3,\cdots,k+1)$，则由（2.14）式有

$$\int_G N(p(k_n x_i^{(n)}(t)))dt = 1$$

从而据定理1.25及式（2.15）有

$$\| x_i^{(n)} \|_M = \int_G |x_i^{(n)}(t)| \cdot p(k_n |x_i^{(n)}(t)|)dt = 1$$

$$(n=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,k+1)$$

记 $v_n(t) = p(u_n)\chi_{G^{(n)}}(t) + p(w_n)\chi_{F_n}(t)$，则由式（1.24）有，$\rho_N(v_n) \leqslant 1$。再根据（2.12），（2.15）式得

$$\left\| \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} x_i^{(n)} \right\|_M \geqslant \int_G \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} x_i^{(n)}(t) v_n(t) dt$$

$$= \frac{1}{k_n} u_n p(u_n) \frac{k}{k+1} \text{mes} G^{(n)} + \frac{1}{k_n}(1+\varepsilon) u_n p(u_n) \frac{1}{k+1} \text{mes} G^{(n)}$$

$$+ \frac{1}{k_n} w_n p(w_n) \text{mes} F_n$$

$$\geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \left\{ [u_n p(u_n) \cdot k + (1+\varepsilon) u_n p((1+\varepsilon) u_n)] \frac{1}{k_n} \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{k+1} \text{mes} G^{(n)} + \frac{1}{k_n} w_n p(w_n) \text{mes} F_n \right\}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty)$$

命 $C_n = \frac{1}{k+1} \text{mes} G^{(n)}$，$\alpha_n = N^{-1}\left(\frac{1}{C_n}\right)$，并定义 L_M 上有界线性泛函：

$$g_i^{(n)}: \ g_i^{(n)}(x) = \int_G x(t) \alpha_n \chi G_i^{(n)}(t) dt \qquad (x \in L_M^*)$$

则容易算出 $\|g_i^{(n)}\|_{(N)}=1\quad(n=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,k)$. 将这些泛函连同 $\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{k+1}$ 代入定理2.5证明中的行列式 Δ_n, 然后再用同样的计算方法，可得 $\Delta_n=(\varepsilon u_n\alpha_n C_n)^k$

回忆 (2.13) 式

$$(k+1)N(p(1+\varepsilon)u_n))C_n\geqslant N(p(u_0))\mathrm{mes}G_0$$

联系 (1.11) ,便知

$$(k+1)(1+\varepsilon)u_np((1+\varepsilon)u_n)C_n\geqslant N(p(u_0))\mathrm{mes}G_0$$

记 $b=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon}N(p(u_0))\mathrm{mes}G_0$, 上式即为 $u_nC_np((1+\varepsilon)u_n)\geqslant b>0$. 于是

$$C_nu_n\alpha_n=C_nu_nN^{-1}\left(\frac{1}{C_n}\right)\geqslant\frac{bN^{-1}\left(\frac{1}{C_n}\right)}{p((1+\varepsilon)u_n)}$$

或即

$$N\left[\frac{C_nu_n\alpha_n}{b}p((1+\varepsilon)u_n)\right]\geqslant\frac{1}{C_n}$$

现在来说明 $C_nu_n\alpha_n\geqslant b$. 如若不然，设 $C_nu_n\alpha_n<b$, 则

$$\frac{C_nu_n\alpha_n}{b}N(p((1+\varepsilon)u_n))>N\left[\frac{C_nu_n\alpha_n}{b}p((1+\varepsilon)u_n)\right]\geqslant\frac{1}{C_n}$$

联系式 (2.13) ，产生矛盾

$$1>\frac{C_nu_n\alpha_n}{b}>\frac{1}{C_nN(p((1+\varepsilon)u_n))}>1$$

最后我们得到

$$\Delta_n=(\varepsilon u_n\alpha_nC_n)^k\geqslant(\varepsilon b)^k>0$$

这与 (3) 矛盾.

$M(u)\in\Delta_2$ 可由 (3) 蕴涵自反立即得出.

§3 局部一致凸，弱局部一致凸和中点局部一致凸

定理 2.7 下述命题等价

(1) $M(u)\in\Delta_2$ 且$M(u)$严格凸；

(2) $L_{(M)}^*$ 局部一致凸；

(3) $L_{(M)}^*$ 弱局部一致凸；

(4) $L_{(M)}^*$ 中点局部一致凸；

(5) $L_{(M)}^*$ 严格凸.

证 由定理2.2和一般 Banach 空间各种凸性的蕴涵关系，我们只须证明 (1) ⇒ (2).

对任给 $x,y_n\in S(L_{(M)}^*)$ $(n=1,2,\cdots)$，须证明 $\left\|\frac{x+y_n}{2}\right\|_{(M)}\to 1$时必有 $\|x-y_n\|_{(M)}\to 0(n\to\infty)$. 据定理1.34和定理 1.35，只须证明$\rho_M\left(\frac{x+y_n}{2}\right)\longrightarrow 1$时必有 $y_n(t)\xrightarrow{\mu}x(t)$ $(n\to\infty)$.

用反证法. 不妨假定对一切 n 有

$$\mathrm{mes}G(|x(t)-y_n(t)|\geqslant\sigma_0)\geqslant\varepsilon_0$$

其中σ_0，ε_0为正常数（否则可选子列）. 记 $K=M^{-1}\left(\frac{3}{\varepsilon_0}\right)$，则对任何 $u\in S(L_{(M)}^*)$，由定理1.29之 (1)

$$1=\int_G M(u(t))dt\geqslant\int_{G(|u(t)|>K)}M(u(t))dt$$

$$>M(K)\mathrm{mes}G(|u(t)|>K)=\frac{3}{\varepsilon_0}\mathrm{mes}G(|u(t)|>K)$$

或 $\quad \mathrm{mes}G(|u(t)|>K)<\frac{\varepsilon_0}{3}$. 命

$$G_n=G(|x(t)|\leqslant K;\ |y_n(t)|\leqslant K;\ |x(t)-y_n(t)|\geqslant\sigma_0)$$

则

$$\mathrm{mes}G_n\geqslant\mathrm{mes}G(|x(t)-y_n(t)|\geqslant\sigma_0)-\mathrm{mes}G(|x(t)|>K)$$

$$-\operatorname{mes}G(|y_n(t)|>K)>\varepsilon_0-\frac{1}{3}\varepsilon_0-\frac{1}{3}\varepsilon_0=\frac{1}{3}\varepsilon_0$$

回顾定理1.2，对上述K，$\varepsilon_0>0$，存在$\delta>0$使得$|u|\leqslant K$，$|v|\leqslant K$，$|u-v|\geqslant\varepsilon_0$，时成立

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

于是

$$\rho_M\left(\frac{x+y_n}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\int_{G_n}\frac{M(x(t))+M(y_n(t))}{2}dt$$

$$+\int_{G\setminus G_n}\frac{M(x(t))+M(y_n(t))}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}[\rho_M(x)+\rho_M(y_n)]-\delta\int_{G_n}\frac{M(x(t))+M(y_n(t))}{2}dt$$

$$\leqslant 1-\delta\int_{G_n}M\left(\frac{x(t)-y_n(t)}{2}\right)dt$$

$$\leqslant 1-\delta M\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)\operatorname{mes}G_n<1-\delta M\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)\frac{\varepsilon_0}{3}$$

与题设 $\rho_M\left(\frac{x+y_n}{2}\right)\to 1$ 矛盾。

由定理1.11，定理2.4和定理2.7可得

推论2.2 $M(u)\in\Delta_2$时 $L_{(M)}^*$ 可赋以局部一致凸且共轭空间严格凸的等价 Luxemburg 范数。

与严格凸性相反，L_M^*的局部一致凸条件要比$L_{(M)}^*$的强些。

定理2.8 下述命题等价

(1) L_M^* 局部一致凸；

(2) L_M^* 弱局部一致凸；

(3) $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$且$M(u)$严格凸。

证 (1) ⇒ (2) 显然。

(2) $\Rightarrow$ (3)　由定理2.4知$M(u)$严格凸.若 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，则存在 $x_0\in L_M^*\setminus E_M$.定义

$$x_n(t)=\begin{cases}x_0(t), & |x_0(t)|<n\\ 0, & |x_0(t)|\geqslant n\end{cases}$$

则 $x_n\in E_M$ $(n=1, 2,\cdots)$且 $\|x_n\|_M\uparrow\|x_0\|_M$ $(n\to\infty)$.所以

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_M}+\frac{x_0}{\|x_0\|_M}\right\|_M\geqslant\left(\frac{1}{\|x_n\|_M}+\frac{1}{\|x_0\|_M}\right)\cdot\|x_n\|_M\longrightarrow 2$$

$(n\to\infty)$.另一方面，因 $x_0\overline{\in}E_M$，存在 $\phi\in(L_M^*)^*$使得$\phi(E_M)=0$ 但$\phi(x_0)\neq 0$.于是

$$\phi\left(\frac{x_0}{\|x_0\|_M}-\frac{x_n}{\|x_n\|_M}\right)=\frac{\phi(x_0)}{\|x_0\|_M}\not\to 0\quad(n\to\infty)$$

与 (2) 矛盾.

如果 $M(u)\overline{\in}\nabla_2$，那么存在正数列 $a_k\uparrow\infty$和G 的一个两两不交可测子集列$\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$使得

$$N\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)a_k\right)>2^kN(a_k);\quad N(a_k)\mathrm{mes}G_k=\frac{1}{2^k}.$$

且 $E\triangleq G\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$是一非零测度集 $(n=1,2,\cdots)$.因此对每一自然数n有

$$\rho_N(a_n\chi_{G_n})=\frac{1}{2^n}<1;\rho_N\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n\chi_{G_n}\right)>2^n\rho_N(a_n\chi_{G_n})=1$$

从而由$\|\cdot\|_{(N)}$的定义，$1>\|a_n\chi_{G_n}\|_{(N)}\geqslant\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$

记 $C=N^{-1}\left(\dfrac{1}{\mathrm{mes}E}\right)$,$C_n=N^{-1}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{\mathrm{mes}E}\right)$，令

$$v_n(t)=C_n\chi_E(t)+a_n\chi_{G_n}(t)$$

那么 $C_n \uparrow C\ (n\to\infty)$，$\rho_N(C\chi_E)=1$ 蕴涵 $\|C\chi_E\|_{(N)}=1$ 且

$$\rho_N(v_n)=N(C_n)=\text{mes}E+N(a_n)\text{mes}G_n=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=1$$

蕴涵 $\|v_n\|_{(N)}=1(n=1,2,\cdots)$．据定理 1.36，必有 $x_0,x_n\in S(L_M^*)$，$x_0(t)=x_0(t)\chi_E(t)$，$x_n(t)=x_n(t)\chi_{G_n}(t)$ 使

$$1=\|C\chi_E\|_{(N)}=\int_G C\chi_E(t)x_0(t)dt=\int_E Cx_0(t)dt$$

且

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\leqslant\|a_n\chi_{G_n}\|_{(N)}=\int_G a_n\chi_{G_n}(t)x_n(t)dt$$

$$=\int_{G_n}a_nx_n(t)dt$$

$(n=1,2,\cdots)$．于是

$$\|x_0+x_n\|_M\geqslant\int_G[x_0(t)+x_n(t)]v_n(t)dt$$

$$=C_n\int_E x_0(t)dt+a_n\int_{G_n}x_n(t)dt$$

$$\geqslant\frac{C_n}{C}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 2\qquad(n\to\infty)$$

且

$$\int_G\chi_E(t)[x_0(t)-x_n(t)]dt=\int_E x_0(t)dt=\frac{1}{c}>0$$

也与（2）矛盾．

在验证（3）$\Rightarrow$（1）之前，我们先介绍一个辅助命题．

引理 2.1 设$M(u)$ 严格凸，$x_n,y_n\in L_M^*$

$$\begin{cases}1=\|x_n\|_M=\dfrac{1}{k_n}[1+\rho_M(k_nx_n)]\\ \\ 1=\|y_n\|_M=\dfrac{1}{h_n}[1+\rho_M(h_ny_n)]\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)\qquad(2.16)$$

且 $\{\rho_M(k_nx_n),\rho_M(h_ny_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界d，那么 $\|x_n+y_n\|_M\to 2$ 时必有 $k_nx_n(t)-h_ny_n(t)\xrightarrow{\mu}0\quad(n\to\infty)$

引理的证明　用反证法．不妨设对一切 n 有

$$\text{mes}G(|k_n x_n(t)-h_n y_n(t)|\geqslant\sigma_0)\geqslant\varepsilon_0$$

其中 σ_0,ε_0 为二正常数．记$K=M^{-1}\left(\frac{3d}{\varepsilon_0}\right)$

$$G_n=G(|k_n x_n(t)|\leqslant K;|h_n y_n(t)|\leqslant K;|k_n x_n(t)-h_n y_n(t)|\geqslant\sigma_0)$$

类似定理2.7的证明，容易计算出　$\text{mes}G_n>\frac{\varepsilon_0}{3}(n=1,2,\cdots)$．

由（2.16）式，$1<k_n,h_n\leqslant 1+d$，因此

$$0<\frac{1}{2+d}<\frac{h_n}{h_n+1+d}\leqslant\frac{h_n}{h_n+k_n}<\frac{h_n}{h_n+1}\leqslant\frac{1+d}{2+d}<1$$

$$0<\frac{1}{2+d}<\frac{k_n}{k_n+1+d}\leqslant\frac{k_n}{k_n+h_n}\leqslant\frac{k_n}{h_n+1}\leqslant\frac{1+d}{2+d}<1$$

据定理1.3，存在 $\delta>0$ 使得对所有 u,v 以及 $\alpha\in\left[\frac{1}{2+d},\frac{1+d}{2+d}\right]$，只要 $|u|\leqslant K$，$|v|\leqslant K$，$|u-v|\geqslant\sigma_0$，就有

$$M(\alpha u+(1-\alpha)v)\leqslant(1-\delta)[\alpha M(u)+(1-\alpha)M(v)]$$

于是注意到$\frac{k_n}{k_n+h_n}+\frac{h_n}{k_n+h_n}=1$，即得

$$\|x_n+y_n\|_M\leqslant\frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\left[1+\rho_M\left(\frac{k_n h_n}{k_n+h_n}(x_n(t)+y_n(t))\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{k_n+h_n}{k_n h_n}\left\{1+(1-\delta)\int_{G_n}\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}M(k_n x_n(t))+\right.\right.$$

$$\left.\frac{k_n}{k_n+h_n}M(h_n y_n(t))\right]dt$$

$$\left.+\int_{G\setminus G_n}\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}M(k_n x_n(t))+\frac{k_n}{k_n+h_n}M(h_n y_n(t))\right]dt\right\}$$

$$=\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M(k_n x_n)\right]+\frac{1}{h_n}\left[1+\rho_M(h_n y_n)\right]$$

$$-\delta\int_{G_n}\left[\frac{1}{k_n}M(k_nx_n(t))+\frac{1}{h_n}M(h_ny_n(t))\right]dt$$
$$<2-2\delta\frac{1}{1+d}\int_{G_n}M\left[\frac{1}{2}k_nx_n(t)-\frac{1}{2}h_ny_n(t)\right]dt$$
$$<2-\frac{2\delta}{1+d}M\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)\mathrm{mes}G_n<2-\frac{2\delta}{1+d}M\left(\frac{\delta_0}{2}\right)\frac{\varepsilon_0}{3}$$

此式与$\|x_n+y_n\|_M\to2$不合。

现在证明 (3) ⇒ (1)。我们须说明对任意的x_0, $x_n\in S(L_M^*)$ $(n=1,2,\cdots)$, $\|x_n+x_0\|_M\to2$ 蕴涵$\|x_n-x_0\|_M\to0(n\to\infty)$。这等价于说，对任意 $x_0,x_n\in S(L_M^*)$ $(n=1,2,\cdots)$, $\|x_n+x_0\|_M\to2$时，$\{x_n\}$必含有一子列依范数$\|\cdot\|_M$收敛于x_0。

取 $k_n>1$ 使得

$$1=\|x_n\|_M=\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M(k_nx_n)\right]\qquad(n=0,1,2,\cdots)\quad(2.17)$$

由定理1.28, $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$有界，因而由 (2.17), $\{\rho_M(k_nx_n)\}_{n=0}^{\infty}$有界。顾及引理2.1, 知 $k_nx_n(t)\xrightarrow{\mu}k_0x_0(t)$ $(n\to\infty)$。如果我们能够说明$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$含一收敛于k_0的子列$\{k_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 则由(2.17), $\rho_M(k_{n_i}x_{n_i})=k_{n_i}-1\to k_0-1=\rho_M(k_0x_0)$。于是由定理1.35, $\|k_{n_i}x_{n_i}-k_0x_0\|_M\to0(i\to\infty)$。再利用 $k_{n_i}\to k_0$, 便得 $\|x_{n_i}-x_0\|_M\to0$ $(i\to\infty)$。从而定理的证明便告完成。

对任给 $\varepsilon>0$, 因$M(u)\in\nabla_2$, 存在 $a>0$和$\varepsilon'>0$使 $\rho_N(v)<a$蕴涵$\|v\|_{(N)}<\varepsilon$且$\rho_N(v)\leqslant1-a$蕴涵$\|v\|_{(N)}<1-2\varepsilon'$。又因$M(u)\in\Delta_2$, 由定理1.22, 存在 $\delta>0$ 使得$F\subset G$, mes$F<\delta$时$\|x_0\chi_F\|_M<\min\{\varepsilon', \frac{1}{k_0}\varepsilon\}$。

因 $k_nx_n(t)\xrightarrow{\mu}k_0x_0(t)$ $(n\to\infty)$, 由 Riesz 定理, $\{k_nx_n(t)\}$有子列几乎处处收敛于 $k_0x_0(t)$, 我们仍以$\{k_nx_n(t)\}$记这个几乎处处收敛子列，则存在 $G_0\subset G$, mes$G_0<\delta$使得$\{k_nx_n(t)\}$在$G\setminus G_0$上一致收敛于 $k_0x_0(t)$。

因$\|x_n+x_0\|_M\to2$, 我们可选 $v_n\in S(L_{(N)}^*)$使

$$\int_G[x_n(t)+x_0(t)]v_n(t)dt\to2\quad(n\to\infty)$$

由此立即可知

$$\int_G x_n(t)v_n(t)dt \to 1; \qquad \int_G x_0(t)v_n(t)dt \to 1$$

$(n\to\infty)$ 因此，存在 $N>0$ 使

$$\int_G x_0(t)v_n(t)dt > 1-\varepsilon' \qquad (n>N)$$

进而由 Hölder 不等式，$n>N$时有

$$1-\varepsilon' < \int_G x_0(t)v_n(t)dt = \int_{G\setminus G_0} x_0(t)v_n(t)dt + \int_{G_0} x_0(t)v_n(t)dt$$

$$\leqslant \|x_0\|_M \|v_n\chi_{G\setminus G_0}\|_{(N)} + \|x_0\chi_{G_0}\|_M < \|v_n\chi_{G\setminus G_0}\|_{(N)} + \varepsilon'$$

回忆 a和ε'的选法，知$\rho_M(v_n\chi_{G\setminus G_0}) > 1-a$，因而

$$\rho_N(v_n\chi_{G_0}) = \rho_N(v_n) - \rho_N(v_n\chi_{G\setminus G_0}) < 1-(1-a) = a$$

故得 $\|v_n\chi_{G_0}\|_{(N)} < \varepsilon (n>N)$。于是 $n>N$ 时

$$\left|\int_G x_n(t)v_n(t)dt - 1\right|$$

$$= \left|\int_{G\setminus G_0}\left[x_n(t) - \frac{k_0}{k_n}x_0(t)\right]v_n(t)dt\right.$$

$$+ \int_G \frac{k_0}{k_n}x_0(t)v_n(t)dt - 1$$

$$\left.+ \int_{G_0}\left[x_n(t) - \frac{k_0}{k_n}x_0(t)\right]v_n(t)dt\right|$$

$$\geqslant \left|\int_{G\setminus G_0}\left[x_n(t) - \frac{k_0}{k_n}x_0(t)\right]v_n(t)dt + \frac{k_0}{k_n}\int_G x_0(t)v_n(t)dt - 1\right|$$

$$- \|v_n\chi_{G_0}\|_{(N)} - \frac{k_0}{k_n}\|x_0\chi_{G_0}\|_M$$

令 $n\to\infty$，注意到 $\|v_n\chi_{G_0}\|_{(N)} < \varepsilon$，$\|x_0\chi_{G_0}\|_M < \dfrac{1}{k_0}\varepsilon < \dfrac{k_n}{k_0}\varepsilon$

以及 $\{k_nx_n(t)\}$ 在$G\setminus G_0$ 上的一致收敛性，得

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{k_0}{k_n} - 1 \right| - 2\varepsilon$$

故而由ε的任意性得到 $k_n \to k_0 \quad (n\to\infty)$。

下面讨论L_M^* 的中点局部一致凸性.

引理 2.2 设 $x_0, x_n \in L_M^*$ $(n=1,2,\cdots)$, $x_0 \neq \theta$, $\{x_n\}$ E_N-弱收敛于x_0, 那么

(1) 存在 $a>0$, $\varepsilon>0$ 使对所有充分大的k有

$$\operatorname{mes} G(|x_k(t)| \geq a) > \varepsilon \tag{2.18}$$

(2) 如果$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$满足 $\|x_n\|_M = \frac{1}{k_n}[1+\rho_M(k_n x_n)]$, 那么$\{k_n\}$有界,

(3) 如果 $M(u)\in\Delta_2$ 且 $M(u)$ 是严格凸的, 那么$\|x_n\|_M \to \|x_0\|_M$ 时$\|x_n - x_0\|_M \to 0 \quad (n\to\infty)$.

证 (1) 由 $x_0 \neq \theta$ 可知存在 $\beta>0$ 使$E \triangleq G(|x_0(t)| \geq \beta)$的测度 $\delta>0$.选整数 n_0 使$2^{n_0} > \frac{2}{\delta}$.如果 (1) 不真, 则$x_k$有子列$\{x_{k_n}\}$使得

$$\operatorname{mes} G(|x_{k_n}(t)| \geq \frac{\beta}{2}) < \frac{1}{2^{n_0+n}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

记 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(|x_{k_n}(t)| \geq \frac{\beta}{2})$, 则 $\operatorname{mes} F < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\delta}{2}$ 且对所有$t\in G\setminus F$ 有 $|x_{k_n}(t)| < \frac{\beta}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$. 定义$v(t) = \chi_{E\setminus F}(t)\operatorname{sign} x_0(t)$, 那么$v\in E_N$且对所有自然数 n 有

$$\left|\int_G [x_0(t) - x_{k_n}(t)] v(t) dt\right| = \left|\int_{E\setminus F} |x_0(t)| dt - \int_{E\setminus F} x_{k_n}(t) \operatorname{sign} x_0(t) dt\right| \geq \beta \operatorname{mes} E\setminus F - \frac{\beta}{2} \operatorname{mes} E\setminus F >$$

$$> \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\delta}{2}$$

与$\{x_n\}$的E_N-弱收敛性不相容.

(2) 视$\{x_n\}$为E_N上的有界线性泛函，那么$\{x_n\}$ E_N-弱收敛，实际上就是w^*收敛，因此，$\{\|x_n\|_M\}$是有界集.选$a>0$，$\varepsilon>0$满足(2.18)(n充分大时)，则

$$\|x_n\|_M > \frac{1}{k^n}\int_{G(|x_n(t)|\geqslant a)} M(k_n x_n(t))dt$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n} M(k_n a)\text{mes}G(|x_n(t)|\geqslant a) > \varepsilon\frac{M(k_n a)}{k_n}$$

对所有充分大的n成立.注意到$u\to\infty$时$\frac{M(u)}{u}\to\infty$，便知$\{k_n\}$必为有界集.

(3) 不失一般性，设$\|x_n\|_M=\|x_0\|_M=1$ $(n=1,2,\cdots)$由(2)，$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$有界.再由$\{x_n\}$的w^*收敛性，易知$\|x_n+x_0\|_M\to 2\|x_0\|_M=2(n\to\infty)$.因此，据引理2.1，$k_n x_n(t)\xrightarrow{\mu}k_0x_0(t)$ $(n\to\infty)$.同于定理2.8中(3) ⇒ (1)的证明，我们只要说明$k_n\to k_0$，便得$\|x_n-x_0\|_M\to 0$ $(n\to\infty)$.

对给定$\varepsilon>0$，选$v\in E_N$，$\rho_N(v)\leqslant 1$使

$$\int_G x_0(t)v(t)dt>1-\varepsilon \tag{2.19}$$

则n充分大时有

$$\int_G x_n(t)v(t)dt>1-\varepsilon$$

由v的范数的绝对连续性，存在$\delta>0$使$E\subset G$，$\text{mes}E<\delta$时

$$\int_E |x_0(t)v(t)|dt\leqslant\|v\chi_E\|_{(N)}<\varepsilon \tag{2.20}$$

因$k_nx_n(t)\xrightarrow{\mu}k_0x_0(t)$ $(n\to\infty)$，我们可选$E_n\subset G$使得mes $E_n<\delta$且n充分大时有

$$|k_nx_n(t)-k_0x_0(t)|<\frac{\varepsilon}{\|x_G\|_M}\qquad(t\in G\setminus E_n)$$

因此，对所有充分大的n，由Hölder不等式有

$$1-\varepsilon<\int_G x_n(t)v(t)dt<\int_{G\setminus E_n}\frac{k_0}{k_n}x_0(t)v(t)dt+\varepsilon$$

$$+\|x_n\|_M\|v\chi_E\|_{(N)}\leqslant\frac{k_0}{k_n}\|x_0\|_M+2\varepsilon=\frac{k_0}{k_n}+2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_0}{k_n}\geqslant 1$.

另一方面，由 (2.19) 、 (2.20) ，n 充分大时有

$$1\geqslant\int_G|x_n(t)v(t)|dt\geqslant\int_{G\setminus E_n}\frac{k_0}{k_n}|x_0(t)v(t)|dt-\varepsilon$$

$$\geqslant\frac{k_0}{k_n}(1-2\varepsilon)-\varepsilon$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_0}{k_n}\leqslant 1$. 综合之，得 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=k_0$，引理得证.

定理 2.9 L_M^* 中点局部一致凸的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$ 且 $M(u)$ 严格凸.

证 充分性. 我们须说明对任何 $z,x_n,y_n\in S(L_M^*)(n=1,2,\cdots)$，$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}-z\right\|_M\to 0\quad(n\to\infty)$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 中分别有子列 $\{x_{n_k}\}$，$\{y_{n_k}\}$ 满足 $\|x_{n_k}-y_{n_k}\|_M\to 0\quad(n\to\infty)$.

因可分空间的共轭空间的单位球是 w^* 列紧的，故 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 中各有子列 $\{x_{n_k}\}$，$\{y_{n_k}\}$ 分别 E_N- 弱收敛于 $x',y'\in U(L_M^*)$. 于是 $\left\{\frac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2}\right\}E_N$-弱收敛于 $\frac{x'+y'}{2}$. 再由 $\left\{\frac{x_n+y_n}{2}\right\}$ 的强收敛性，可见 $\frac{x'+y'}{2}=z$. 鉴于 L_M^* 的严格凸性，得 $x'=y'=z$. 于是由引理 2.2，可知 $\|x_{n_k}-z\|_M\to 0$，$\|y_{n_k}-z\|_M\to 0\quad(n\to\infty)$. 由此立即可得 $\left\|\frac{x_{n_k}+y_{n_k}}{2}-z\right\|_M\to 0\quad(u\to\infty)$.

必要性。由定理2.4，$M(u)$严格凸是必要的。若$M(\overline{v})\in\Delta_2$，则存在 $u_k\uparrow\infty(k\to\infty)$和 G 的一列两两不交子集$\{G_k\}$使得

$$M\left((1+\frac{1}{k})u_k\right)>2^kM(u_k);\quad M(u_k)\text{mes}G_k=\frac{1}{2^k} \tag{2.21}$$

$(k=1,2,\cdots)$。对每个k，将G_k依测度等分为二不交子集G_k',G_k''，然后定义

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G'_k}(t)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G''_k}(t)$$

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G'_k}(t)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}u_k\chi_{G''_k}(t)$$

$$y_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G'_k}(t)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}u_k\chi_{G''_k}(t)+\sum_{k=n}^{\infty}u_k\chi_{G''_k}(t)$$

$(n=1,2,\cdots)$。容易看出 $z,x_n,y_n\in L_M$，$z=\frac{x_n+y_n}{2}$，$\|x_n\|_M\leqslant\|z\|_M$ 且 $\|x_n-y_n\|_M\geqslant\|x_n-y_n\|_{(M)}=1\quad(n=1,2,\cdots)$。我们若能说明 $\|y_n\|_M\to\|z\|_M$，定理便告证毕。

取 k 使

$$\|z\|_M=\frac{1}{k}[1+\rho_M(kz)]=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}M(ku_i)\text{mes}G_i'$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}M(\frac{1}{2}ku_i)\text{mes}G_i''<\infty$$

则对任意$\varepsilon>0$，n 充分大时 $\frac{1}{k}\sum_{i=n}^{\infty}M(ku_i)\text{mes}G_i'<\varepsilon$。注意 $\text{mes}G_i'=\text{mes}G_i''$，$n$充分大时便有

$$\|z\|_M\leqslant\|y_n\|_M\leqslant\frac{1}{k}[1+\rho_M(ky_n)]$$

$$=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}M(ku_i)\text{mes}G_i'+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}M\left(\frac{1}{2}ku_i\right)\text{mes}G_i''$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{i=n}^{\infty}M(ku_i)\text{mes}G_i'<\|z\|_M+\varepsilon$$

即 $\|y_n\|_M \to \|z\|_M \ (n\to\infty)$.

§4 H 性质和H严格凸

我们知道，$L^p(p>1)$具有H性质，其证明视 $p\geq 2$ 和$p<2$ 而依赖于两个不同的巧妙不等式[19].这种证明方法不易推广到Orlicz空间．本节将用完全不同的技巧给出Orlicz空间具有H性质的判别准则．

引理 2.3 如果 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，则 $L^*_{(M)}$与 L^*_M都不具有H性质．

证 因 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，存在数列$\{u_k\}$和 G 的一列两两不交子集$\{G_k\}$使得 (2.21) 成立．定义

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\chi_{G_k}(t);\quad x_n(t)=\sum_{k\neq n}u_k\chi_{G_k}(t)-u_n\chi_{G_n}(t)$$

$n=1,2,\cdots$.显然 $\|x\|_M=\|x_n\|_M$，$\|x\|_{(M)}=\|x_n\|_{(M)}$ $(n=1,2,\cdots)$.

对任给 $f\in(L^*_M)^*$，将f按 (1.51) 分解为 $f=v+\phi$.因对每一n，$x(t)-x_n(t)=2u_n\chi_{G_n}(t)\in E_N$ 处处收敛于零而且

$$|[x(t)-x_n(t)]v(t)|\leq|2x(t)v(t)|\qquad t\in G$$

由 Lebesgue 控制收敛定理

$$f(x-x_n)=\int_G[x(t)-x_n(t)]v(t)dt\longrightarrow 0.\quad (n\to\infty)$$

即 $x_n\xrightarrow{w}x \quad (n\to\infty)$.

另一方面，在定理2.8的 (2) ⇒ (3) 证明中，我们已估算到$u_n\|\chi_{G_n}\|_{(N)}\geq\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$，因而

$$\|x-x_n\|_M>\|x-x_n\|_{(M)}=2u_n\|\chi_{G_n}\|_{(M)}\geq\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\to 2$$

$(n\to\infty)$. 因此，L^*_M与 $L^*_{(M)}$均无H性质．

引理 2.4 对任何G中有界闭集 E，存在E的不交子集 E_n'，E_n'' 使 $E=E_n'\cup E_n''$，$\text{mes}E_n'=\text{mes}E_n''$ $(n=1,2,\cdots)$且对任何E上可积函数 $v(t)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_G v(t)[\chi_{E'_n}(t)-\chi_{E_n''}(t)]dt=0 \qquad (2.22)$$

证 选 E 的一可数稠集$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$（不妨假定E 为非零集）．记

$$U_{n,k}=\{t\in E:|t-t_k|<\frac{1}{n}\} \qquad (n,k=1,2,\cdots)$$

对每个n,k，将$U_{n,k}\setminus\bigcup_{j=1}^{k-1}U_{n,j}$ （约定 $\bigcup_{j=1}^{0}U_{n,j}=\phi$） 按测度等分为不交子集 $E'_{n,k}$，$E''_{n,k}$，然后定义

$$E_n'=\bigcup_{k=1}^{\infty}E'_{n,k}\ ; \qquad E_n''=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_n''{}_{,k}$$

则 E_n'与E_n'' 互不相交，$E=E_n'\cup E_n''$ 以及 $\text{mes}E_n'=\text{mes}E_n''$，$(n=1,2,\cdots)$．

对任给E上可积函数$v(t)$和$\varepsilon>0$，选E上连续函数$g(t)$ 使得

$$\int_E|v(t)-g(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

因$g(t)$ 于E上一致连续，所以存在 $\delta>0$ 使

$$\left|\, g(t_1)-g(t_2)\,\right|<\frac{\varepsilon}{2\text{mes}E}$$

对所有满足 $|t_1-t_2|<\delta$ 的$t_1,t_2\in E$ 成立．于是$n>\frac{2}{\delta}$，$k\geqslant 1$，$t_1,t_2\in E'_{n,k}\cup E''_{n,k}$时，有 $|t_1-t_2|<\frac{2}{n}<\delta$．从而 $n>\frac{2}{\delta}$ 时

$$\left|\int_G v(t)[\chi_{E_n'}(t)-\chi_{E_n''}(t)]dt\right|$$

$$\leqslant\int_E|v(t)-g(t)|\,dt+\left|\int_{E_n'}g(t)dt-\int_{E_n''}g(t)dt\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{E'_{n,k}}g(t)\,dt-\int_{E''_{n,k}}g(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 (2.22) 成立.

引理 2.5 如果 $M(u)$ 非严格凸，则 $L^*_{(M)}$ 与 L^*_M 均不具有 H 性质.

证 由条件，存在 $a>0$, $b>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使 $a<b$ 且在 $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ 上 $M(u)$ 为线性：

$$M(u)=Au+B, \qquad u\in[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$$

选有界闭集 $E\subset G$ 使 $0<\text{mes}E<\text{mes}G$ 且

$$M\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{mes}E\leqslant 1, \quad N(A)\text{mes}E<1$$

对此 E，选 E_n', E_n'' 满足引理 2.4 的所有条件 $(n=1,2,\cdots)$. 定义

$$C=M^{-1}\left[\frac{1}{\text{mes}G\backslash E}\left(1-M\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{mes}E\right)\right]$$

$$u_n(t)=a\chi_{E_n'}(t)+b\chi_{E_n''}(t)+C\chi_{G\backslash E}(t)$$

$$u(t)=\frac{a+b}{2}\chi_E(t)+C\chi_{G\backslash E}(t)$$

$n=1,2,\cdots$. 那么由 $\dfrac{M(a)+M(b)}{2}=M\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 及 C 的选法，容易计算出 $\rho_N(u_n)=\rho_M(u)=1$，因而 $\|u_n\|_{(M)}=\|u\|_{(M)}=1$ $(n=1,2,\cdots)$.

对任何 $f\in(L^*_M)^*$，f 有 (1.51) 的分解 $f=v+\phi$. 因 $u,u_n\in E_M$，由 (2.22)

$$f(u-u_n)=\int_G[u(t)-u_n(t)]v(t)dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_G v(t)[\chi_{E_n'}(t)-\chi_{E_n''}(t)]dt\to 0$$

故 $v_n\xrightarrow{w}u$ $(n\to\infty)$. 再由 $\|u_n-u\|_{(M)}=\dfrac{b-a}{2}\|\chi_E\|_{(M)}>0$ 即知 $L^*_{(M)}$ 无 H 性质.

现在考虑 L_M^*.因 $N(A)\text{mes}E\leqslant 1$，故存在 $k_0>0$及 $F\subset G\setminus E$ 使

$$N(A)\text{mes}E+N(p(k_0))\text{mes}F=1$$

定义

$$x(t)=\frac{1}{2k_0}(b+a)\chi_E(t)+\chi_F(t)$$

$$x_n(t)=\frac{a}{k_0}\chi_{E_n'}(t)+\frac{b}{k_0}\chi_{E_n''}(t)+\chi_F(t)$$

$(n=1,2,\cdots)$.注意在$[a,b]$上恒有 $p(u)=M'(u)=A$，易知

$$\int_G N(p(k_0x(t)))dt=\int_G N(p(k_0x_n(t)))dt=1$$

于是由定理1.25

$$\|x\|_M=\int_G x(t)p(k_0x(t))dt=\int_G x_n(t)p(k_0x_n(t))dt=\|x_n\|_M$$

$(n=1,2,\cdots)$.类似 $L^*_{(M)}$ 情形，可得 $x_n\xrightarrow{w}x$ $(n\to\infty)$. 联系 $\|x_n-x\|_M=\frac{b-a}{2k_0}\|\chi_E\|_M>0$，便知 L_M^*亦无H性质.

定理 2.10 下述命题等价

(1) $M(u)\in\Delta_2$且$M(u)$严格凸；

(2) $L^*_{(M)}$ 具有H性质；

(3) L^*_M 具有H性质；

(4) $L^*_{(M)}$ 是H严格凸的；

(5) L^*_M是 H严格凸的.

证 由定理2.7， (1) ⇒ (4) ⇒ (2).再由引理 2.3 和引理 2.5， (2) ⇒ (1) ， (5) ⇒ (3) ⇒ (1) . 再由定理 2.4 和引理2.2之 (3) ，即可得 (1) ⇒ (5) 的证明.

§5 弱一致凸和各向一致凸

定理 2.11 $L^*_{(M)}$弱一致凸的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$ 且

$M(u)$ 严格凸.

证 必要性.设$L_{(M)}^*$弱一致凸.由定理2.2,$M(u)\in\Delta_2$且$M(u)$严格凸.再由定理1.46,$L_{(M)}^*$是弱序列完备的.联系定理0.25,$L_{(M)}^*$自反,故得$M(u)\in\nabla_2$.

充分性.设 $x_n,y_n\in S(L_{(M)}^*)$ $(n=1,2,\cdots)$, $\|x_n+y_n\|_{(M)}\to 2$ $(n\to\infty)$.仿照定理2.7中(1)$\Rightarrow$(2)的证明可得$x_n(t)-y_n(t)\xrightarrow{\mu}0(n\to\infty)$.

对任给 $f=v+\phi\in(L_M^*)^*$ ($v\in L_N^*$,ϕ为奇异泛函),因$M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$,故 $\phi=\theta$, $v\in E_N$.从而对于任何 $\varepsilon>0$,存在$\delta>0$使得mes$E<\delta$时$\|v\chi_E\|_N<\varepsilon$.再由 $x_n(t)-y_n(t)\xrightarrow{\mu}0$ $(n\to\infty)$可知存在 $G_n\subset G$,mse$G_n<\delta$使得n充分大时

$$|x_n(t)-y_n(t)|<\frac{\varepsilon}{\|\chi_G\|_{(M)}\|v\|_N}\quad(t\in G\backslash G_n)$$

于是由Hölder不等式,当n充分大时有

$$\left|f(x_n-y_n)\right|=\left|\int_G[x_n(t)-y_n(t)]v(t)dt\right|$$

$$\leqslant\int_{G\backslash G_n}|x_n(t)-y_n(t)|\cdot|v(t)|dt+\|x_n-y_n\|_{(M)}\|v\chi_{G_n}\|_N$$

$$<\varepsilon+2\varepsilon=3\varepsilon$$

即 $x_n-y_n\xrightarrow{w}0(n\to\infty)$.

定理 2.12 L_M^*弱一致凸的充要条件是$M(u)$一致凸且$M(u)\in\Delta_2$.

证 只须证必要性.设L_M^*弱一致凸.由定理2.8,$M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$且$M(u)$严格凸.选 $a>0$ 和 $A\subset G$使 $0<\text{mes}A<\text{mes}G$ 且$N(p(a))\text{mes}A=\frac{1}{2}$.如果$M(u)$不是一致凸的,则存在 $\varepsilon>0,u_0$

>0及$u_n \geqslant u_0$ 使 (2.12) 成立。因$M(u)$是严格凸的，故必有 $u_n \to \infty$ $(n\to\infty)$。于是不妨设对一切n有 $N(p(u_n))\text{mes}G\backslash A \geqslant \frac{1}{2}$，从而可选 $G_n \subset G\backslash A$ 使 $N(p(u_n))\text{mes}G_n = \frac{1}{2}$。记

$$k_n = (1+\varepsilon)u_n p((1+\varepsilon)u_n)\text{mes}G_n + ap(a)\text{mes}A$$

$$h_n = u_n p(u_n)\text{mes}G_n + ap(a)\text{mes}A$$

定义

$$x_n(t) = \frac{1}{k_n}(1+\varepsilon)u_n \chi_{G_n}(t) + \frac{1}{k_n}a\chi_A(t)$$

$$y_n(t) = \frac{1}{h_n}u_n \chi_{G_n}(t) + \frac{1}{h_n}a\chi_A(t)$$

$n=1,2,\cdots$。我们先估算x_n, y_n和$\frac{1}{2}(x_n+y_n)$的范数。因

$$\int_G N(p(k_n x_n(t)))dt \geqslant \int_G N(p(h_n y_n(t)))dt$$

$$= N(p(u_n))\text{mes}G_n + N(p(a))\text{mes}A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

由 (2.12)式、定理1.25及Young不等式有

$$\| y_n \|_M = \int_G y_n(t) p(h_n y_n(t))dt = 1$$

$$\| x_n \|_M \leqslant \frac{1}{k_n}[1+\rho_M(k_n x_n)]$$

$$\leqslant \frac{1}{k_n}\left[\int_G N(p(k_n x_n(t)))dt + \int_G M(k_n x_n(t))dt\right]$$

$$= \frac{1}{k_n}\int_G k_n x_n(t) p(k_n x_n(t))dt = 1$$

$n=1,2,\cdots$。又因$M(u)\in\nabla_2$，存在 $K>2$ 使 $N(2v)\leqslant KN(v)$ 对所有$v\geqslant p(u_0)>0$成立。结合 $N(v)$的凸性得

$$N\left[p\left(\frac{k_n h_n}{k_n+h_n}\left(\frac{1+\varepsilon}{k_n}+\frac{1}{h_n}\right)u_n\right)\right] = N\left[p\left(\left(1+\frac{\varepsilon h_n}{k_n+h_n}\right)u_n\right)\right]$$

$$\leqslant N[p((1+\varepsilon)u_n)]<N[(1+\frac{1}{n})p(u_n)]$$

$$\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)N(p(u_n))+\frac{1}{n}N(2p(u_n))$$

$$<N(p(u_n))+\frac{K}{n}N(p(u_n))$$

于是

$$\int_G N\left[p\left(\frac{2k_nh_n}{k_n+h_n}\frac{x_n(t)+y_n(t)}{2}\right)\right]dt$$

$$=N\left[p\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}\left(\frac{1+\varepsilon}{k_n}+\frac{1}{h_n}\right)u_n\right)\right]\text{mes}G_n$$

$$+N\left[p\left(\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}\left(\frac{a}{k_n}+\frac{a}{h_n}\right)\right)\right]\text{mes}A$$

$$<\left(1+\frac{K}{n}\right)\left[N(p(u_n))\text{mes}G_n+N(p(a))\text{mes}A\right]$$

$$=1+\frac{K}{n}$$

这表明

$$\int_G N\left[\frac{1}{1+\frac{K}{n}}p\left(\frac{2k_nh_n}{k_n+h_n}\frac{x_n(t)+y_n(t)}{2}\right)\right]dt\leqslant 1$$

从而由$\|\cdot\|_M$的定义和k_n,h_n的选取

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|_M\geqslant\int_G\frac{x_n(t)+y_n(t)}{2}\frac{1}{1+\frac{K}{n}}$$

$$p\left(\frac{2k_nh_n}{k_n+h_n}\frac{x_n(t)+y_n(t)}{2}\right)dt\geqslant\frac{1}{1+\frac{K}{n}}\left\{\frac{k_n+h_n(1+\varepsilon)}{2k_nh_n}\right.$$

$$\left.u_np(u_n)\text{mes}G_n+\frac{k_n+h_n}{2k_nh_n}ap(a)\text{mes}A\right\}$$

$$= \frac{1}{2\left(1+\frac{K}{n}\right)}\left\{\left[\frac{1+\varepsilon}{k_n}u_n p(u_n)\text{mes}G_n + \frac{a}{k_n}p(a)\text{mes}A\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{h_n}u_n p(u_n)\text{mes}G_n + \frac{a}{h_n}p(a)\text{mes}A\right]\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{2\left(1+\frac{K}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left\{\left[\frac{1+\varepsilon}{k_n}u_n p((1+\varepsilon)u_n)\text{mes}G_n\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a}{k_n}p(a)\text{mes}\,A\right] + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{K}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow 1 \qquad (n\to\infty)$$

最后，因

$$u_n p(u_n)\text{mes}G_n \leqslant q(p(u_n))p(u_n)\text{mes}G_n$$

$$\leqslant N(2p(u_n))\text{mes}G_n \leqslant KN(p(u_n))\text{mes}G_n = \frac{1}{2}K$$

所以

$$k_n \leqslant (1+\varepsilon)\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n p(u_n)\text{mes}G_n + ap(a)\text{mes}A$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)K + ap(a)\text{mes}A \triangleq b$$

因而

$$\int_G [y_n(t) - x_n(t)]\frac{\chi_A(t)}{a\cdot\text{mes}A}dt = \frac{1}{h_n} - \frac{1}{k_n}$$

$$= \frac{1}{k_n h_n}\left[(1+\varepsilon)u_n p((1+\varepsilon)u_n) - u_n p(u_n)\right]\text{mes}G_n$$

$$\geqslant \frac{1}{b^2}\left[\varepsilon u_n p(u_n)\text{mes}G_n\right] > \frac{\varepsilon}{b^2}N(p(u_n))\text{mes}G_n = \frac{\varepsilon}{2b^2}$$

$(n=1,2,\cdots)$. 这表明$\{y_n - x_n\}$不是弱收敛于零的，与L_M^* 的弱一致凸性相矛盾.

定理 2.13 $L_{(M)}^*$ 各向一致凸的充要条件是 $M(u)\in\Delta_2$ 且 $M(u)$严格凸.

证 由定理 2.2 知条件必要.今证充分性.设$z,x_n\in L_M^*$,

$\|x_n\|_{(M)}=1$, $\|x_n+z\|_{(M)}\leqslant 1$ $(n=1,2\cdots)$, $\|x_n+\frac{1}{2}z\|_{(M)}$ $\to 1$ $(n\to\infty)$, 须证 $z=\theta$. 命 $y_n=x_n+z$ $(n=1,2,\cdots)$,仿照定理2.7中 (1) $\Rightarrow$ (2) 的证明,可证 $z(t)=y_n(t)-x_n(t)\xrightarrow{\mu}0$,因此必有 $z=\theta$,

定理 2.14 若 $M(u)\in\Delta_2$且 $M(u)$ 严格凸,则 $L_{(M)}^*$ 是各向一致凸的.

证 若定理不真,则有 $z,x_n\in L_M^*$, $z\neq\theta$, $\|x_n\|_M=1$

$\|x_n+z\|_M\leqslant 1$ $(n=1, 2,\cdots)$且 $\|x_n+\frac{1}{2}z\|_M\to 1$ $(n\to\infty)$.

首先,我们说明$\{x_n\}$含一子列依测度收敛于$az(t)$(a为一常数).如果$\{x_n\}$或$\{x_n+z\}$含子列依测度收敛于零,则可选 $a=0$或$a=1$.如果不是这样,那么由$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$ 可知 $\{k_n,h_n\}_{n=1}^{\infty}$是一有界集,这里$k_n,h_n$满足

$$1=\|x_n\|_M=\frac{1}{k_n}\left[1+\rho_M(k_nx_n)\right]$$

$$1\geqslant\|x_n+z\|_M=\frac{1}{h_n}\left[1+\rho_M(h_n(x_n+z))\right]$$

$(n=1,2,\cdots)$.类似引理2.1的证明,可知

$$k_nx_n(t)-h_n[x_n(t)+z(t)]\xrightarrow{\mu}0$$

从$\{k_n\}$和$\{h_n\}$中选收敛子列$\{k_{n_i}\}$和$\{h_{n_i}\}$,并设其极限分别为k_0和h_0,则有

$$x_{n_i}(t)\xrightarrow{\mu}\frac{h_0}{k_0-h_0}z(t)\qquad(i\to\infty)$$

($z\neq\theta$ 蕴涵 $k_0\neq h_0$)。

其次，我们不妨假定 $a\neq 0$（否则，我们在下面的讨论中以 x_n+z 代替 x_n）。因依测度收敛的函数列含有几乎处处收敛子列，故不妨设 $\{x_n(t)\}$ 几乎处处收敛于 $az(t)$。由于 $M(u)\in\Delta_2$，$\rho_M(az)>0$，所以存在 $\beta>0$ 和 $\delta>0$ 使得 $\int_{G\setminus e}M(az(t))dt>\beta$ 且 $\|az\chi_e\|_M<\frac{\beta}{2}$ 对一切满足 $\text{mes}\,e<\delta$ 的 $e\subset G$ 成立。再由 $x_n(t)\xrightarrow{a\cdot e\cdot}az(t)$ 可知存在 $G_0\subset G$ 使 $\text{mes}G_0<\delta$ 且在 $G\setminus G_0$ 上 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $az(t)$。此外，我们还可以选取上述 G_0 使得 $az(t)$ 在 $G\setminus G_0$ 上有界。顾及 $k_n>1$，有

$$
\begin{aligned}
1=\|x_n\|_M&=\frac{1}{k_n}\Big[1+\int_{G_0}M(k_nx_n(t))dt\\
&\quad+\int_{G\setminus G_0}M(k_nx_n(t))dt\Big]\\
&\geqslant\|x_n\chi_{G_0}\|_M+\int_{G\setminus G_0}M(x_n(t))dt
\end{aligned}
$$

注意到 $\{x_n(t)\}$ 在 $G\setminus G_0$ 上的一致收敛性，令 $n\to\infty$，得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n\chi_{G_0}\|_M\leqslant 1-\int_{G\setminus G_0}M(az(t))dt<1-\beta$$

最后，因 $\|x_n+\frac{1}{2}z\|_M\to 1\quad(n\to\infty)$，存在 $v_n\in L_N^*$，$\rho_N(v)\leqslant 1\quad(n=1,2,\cdots)$ 使得

$$\int_G[x_n(t)+\frac{1}{2}z(t)]\,v_n(t)dt\longrightarrow 1\,(n\to\infty)$$

由此立即可知

$$\int_G x_n(t)v_n(t)dt\to 1;\quad \int_G[x_n(t)+z(t)]v_n(t)dt\to 1\quad(n\to\infty)$$

因此

$$\int_G z(t)v_n(t)dt\to 0\quad(n\to\infty)$$

由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n\chi_{G_0}\|_M<1-\beta$和

$$\int_G x_n(t)v_n(t)dt\leqslant\int_{G\setminus G_0}x_n(t)v_n(t)dt+\|x_n\chi_{G_0}\|_M$$

令 $n\to\infty$，由$\{x_n(t)\}$在$G\setminus G_0$上的一致收敛性，易得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{G\setminus G_0}az(t)v_n(t)dt=\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{G\setminus G_0}x_n(t)v_n(t)dt$$

$$>1-(1-\beta)=\beta$$

于是有矛盾：

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_G az(t)v_n(t)dt\geqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{G\setminus G_0}az(t)v_n(t)dt$$

$$-\|az\chi_{G_0}\|_M>\beta-\frac{\beta}{2}=\beta$$

这一矛盾使定理获证．

注：在定理2.14的证明中$M(u)\in\Delta_2$的条件被用来说明$\lim\limits_{\mathrm{mes}E\to 0}\|z\chi_E\|_M=0$．但有例子[19]表明，$\Delta_2$条件不是必要的。到目前为止，还未见有人给出$L_M^*$各向一致凸的判别准则．

§6 光 滑 性

定理 2.15 $E_{(M)}$光滑的充要条件是$p(u)$连续．此时$u\in E_M$的支撑泛函为

$$v(t)=p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}\,u(t)\bigg/\int_G\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)dt$$

$$(u\neq\theta)\qquad\qquad(2.23)$$

证 因$p(u)$连续时$E_{(M)}$的共轭空间L_N^*严格凸，从而知$E_{(M)}$光滑．

反之，若$p(u)$不连续，则$q(v)$在某区间$[v_1,v_2]$上取常值$A>0$．

取 $a>0$ 和G的两个不交子集G_1, G_2使$\text{mes}G_1>0$ 且

$$M(q(a))\text{mes}G_2+M(A)\text{mes}G_1=1$$

将G_1按测度等分为E，F二集，并定义

$$u(t)=A\chi_{G_1}(t)+q(a)\chi_{G_2}(t)$$

$$w_1(t)=v_1\chi_E(t)+v_2\chi_F(t)+a\chi_{G_2}(t)$$

$$w_2(t)=v_2\chi_E(t)+v_1\chi_F(t)+a\chi_{G_2}(t)$$

则 $u\in E_M$ 且 $\|u\|_{(M)}=1$，$w_1\neq w_2$.又由 $q(v_i)=A$，知

$$\int_G M(q(w_i(t)))dt=\int_G M(u(t))dt=1 \qquad (i=1,2)$$

因此由定理1.25

$$1=\left\|\frac{w_i}{\|w_i\|_N}\right\|_N=\int_G\frac{w_i(t)}{\|w_i\|_N}q(w_i(t))dt$$

$$=\int_G\frac{w_i(t)}{\|w_i\|_N}u(t)dt$$

$(i=1,2)$.这说明u的支撑泛函不唯一，即 $E_{(M)}$不光滑.

今设 $u\in E_{(M)}$，$u\neq\theta$,欲求其支撑泛函.设$v\in L_N^*$为u的支撑泛函，即$\|v\|_N=1$ 且

$$\|u\|_{(M)}=\int_G u(t)v(t)dt=\int_G|u(t)v(t)|dt$$

取 $k>1$ 使 $\frac{1}{k}[1+\rho_N(kv)]=\|v\|_N=1$，则

$$1+\rho_N(kv)=\int_G\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}kv(t)dt$$

$$\leqslant\int_G M\left(\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right)dt+\int_G N(kv(t))dt$$

$$\leqslant 1+\rho_N(kv)$$

由此可见

$$\int_G\left[M\left(\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right)+N(kv(t))-\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}kv(t)\right]dt=0$$

据Young 不等式，上式被积函数非负，即得

$$M\left(\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right)+N(kv(t))\overset{a.e.}{=\!=}\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}kv(t) \ .$$

因$p(u)$连续时（1.11）的二式相同，故由上式得

$$k|v(t)|\overset{a.e.}{=\!=}p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)$$

于是

$$k=\int_G\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}k|v(t)|dt=\int_G\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)dt$$

结合这二式并注意 $u(t)v(t)\overset{a.e.}{=\!=}|u(t)v(t)|$即得(2.23)。

定理 2.16 E_M光滑的充要条件是 $p(u)$ 连续。此时 $u\in E_M$ $(u\neq 0)$的支撑泛函是

$$v(t)=p\left(k\frac{|u(t)|}{\|u\|_M}\right)\text{sign}\,u(t) \tag{2.24}$$

其中k满足 $1=\frac{1}{k}\left[1+\rho_M\left(\frac{ku}{\|u\|_M}\right)\right]$.

证 必要性。若 $p(u)$ 不连续，仿定理 2.15 的证明，可构造$v_1,v_2\in E_{(N)}$，$v_1\neq v_2$，$\rho_N\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)=\rho_N(v_1)=\rho_N(v_2)=1$ 并

且 v_1,v_2 最多只取四个不同值。由定理 1.44，存在梯形函数 $u\in S(E_M)$ 使得

$$1=\left\|\frac{v_1+v_2}{2}\right\|_{(N)}=\int_G\frac{v_1(t)+v_2(t)}{2}u(t)dt$$

由此立即可得

$$1=\|u\|_M=\int_G v_1(t)u(t)dt=\int_G v_2(t)u(t)dt$$

与E_M的光滑性矛盾。

充分性。对$u\in E_M$，$u\neq\theta$，取 $k>1$ 满足定理的条件。对任何 $v_i\in S(L^*_{(N)})$有

$$\int_G u(t)v_i(t)dt = \| u \|_M \qquad (i=1,2)$$

蕴涵

$$1+\rho_M\left(k\frac{u}{\|u\|_M}\right)=\int_G k\frac{u(t)}{\|u\|_M}v_i(t)dt$$

$$\leqslant \rho_N(v_i)+\rho_M\left(k\frac{u}{\|u\|_M}\right)\leqslant 1+\rho_M\left(k\frac{u}{\|u\|_M}\right)$$

从而由 $p(u)$ 连续及 (1.11) 得

$$v_i(t)\underset{\text{a.e.}}{=} p\left(k\frac{|u(t)|}{\|u\|_M}\right)\text{sign}u(t) \quad (i=1,2)$$

这说明 $v_1=v_2$ 且 (2.24)成立.

下面考虑$L_{(M)}^*$和L_M^*的光滑性.

引理 2.6 对任何$u\in L_M^*$, 存在奇异泛函 ϕ_i, $\|\phi_i\|=1$ 使 $\phi_i(u)=\xi_0(u)$ $(i=1,2)$ 且$\phi_1\neq\phi_2$ (ξ_0定义见定理1.32).

证 不妨设 $u\overline{\in} E_M$. 命

$$G_n=\{t\in G: n-1\leqslant |u(t)|<n\}$$

则 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ 且 $t_1,t_2\in G_n$ 时

$$|u(t_1)|<n\leqslant\frac{n}{n-1}|u(t_2)|$$

将G_n按测度等分为 G_n', G_n'', 定义

$$h_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}u(t)\chi_{G_n'}(t);\ h_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}u(t)\chi_{G_n''}(t)$$

对任给 $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2}\xi_0)$, 取$m$充分大使

$$\frac{m-1}{m}\,\frac{1}{\xi_0-2\varepsilon}>\frac{1}{\xi_0-\varepsilon}$$

于是

$$\int_G M\left(\frac{h_1(t)}{\xi_0-2\varepsilon}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n'}M\left(\frac{u(t)}{\xi_0-2\varepsilon}\right)dt$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n'}M\left(\frac{n-1}{\xi_0-2\varepsilon}\right)dt=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M\left(\frac{n-1}{\xi_0-2\varepsilon}\right)dt$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{u(t)}{\xi_0-2\varepsilon}\right)dt\geqslant\frac{1}{2}\sum_{n=m}^{\infty}M\left(\frac{u(t)}{\xi_0-\varepsilon}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_G M\left(\frac{u(t)-u_m(t)}{\xi_0-\varepsilon}\right)dt=\infty$$

最后一式由 $\xi_0=\xi_0(u)$ 的定义得到，其中

$$u_m(t)=\begin{cases}u(t), & |u(t)|<m\\ 0, & |u(t)|\geqslant m\end{cases}$$

由ε任意性和定理1.33，也有$d_1(h_1)=\xi_0=\xi_0(u)$. 同理$d_1(h_2)=\xi_0$. 记

$$E_M(h_i)=\text{span}\{h_i,E_M\}\qquad(i=1,2)$$

则每个 $x\in E_M(h_1)$都有唯一分解 $x=ah_1+w$,其中a为实数，$w\in E_M$. 从而

$$\|h_2-x\|_M=\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\left\{\int_G[h_2(t)-x(t)]v(t)dt\right\}$$

$$=\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\left\{\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n''}[h_2(t)-w(t)]v(t)dt\right.$$

$$\left.+\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n'}[-ah_1(t)-w(t)]v(t)dt\right\}$$

$$\geqslant\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n''}[h_2(t)-w(t)]v(t)dt$$

$$=\left\|h_2-w\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n''}\right\|_M\geqslant d_1(h_2)=\xi_0$$

从x的任意性，得

$$d_1(h_2,E_M(h_1))=\inf\{\|h_2-x\|_M:x\in E_M(h_1)\}=\xi_0$$

同理

$$d_1(h_1,E_M(h_2))=\inf\{\|h_1-x\|_M:x\in E_M(h_2)\}=\xi_0$$

据 Hahn-Banach定理，存在 $\phi_i \in (L_M^*)^*$，$\|\phi_i\| = 1$ $(i=1,2)$ 使 $x_i \in E_M(h_i)$ $(i=1,2)$时 $\phi_1(x_2)=0, \phi_2(x_1)=0$且

$$\phi_1(h_1) = d_1(h_1, E_M(h_2)) = \xi_0;\quad \phi_2(h_2) = d_1(h_2, E_M(h_1)) = \xi_0$$

显然 ϕ_1, ϕ_2为奇异泛函，$\phi_1 \neq \phi_2$ 并有

$$\phi_i(u) = \phi_i(h_1 + h_2) = \phi_i(h_i) = \xi_0 \quad (i=1,2)$$

定理 2.17 设 $p(u)$ 连续，则$u \in L_{(M)}^*$是 $L_{(M)}^*$ 的光滑点的充要条件是u的支撑泛函属于 L_N^*且 $u \neq \theta$.

证 充分性. 设 $v \in L_N^*$是u的支撑泛函，完全仿照定理2.15的证明，v 由 (2.23)唯一确定.故u的支撑泛函唯一，即u是光滑点.

必要性. 显然θ点为非光滑点.若必要性不真，则u的支撑泛函 $f = v + \phi$ 的奇异部分$\phi \neq \theta$.由定理1.38

$$1 = \|f\|_N = \|v\|_N + \|\phi\|_N > \|v\|_N$$

由此可知 $u \overline{\in} E_M$.于是由引理2.6，存在奇异泛函ϕ_i，$\|\phi_i\| = 1$使 $\phi_i(u) = \xi_0(u)$ $(i=1,2)$ 且 $\phi_1 \neq \phi_2$.

因

$$\phi(u) = \phi(u - u_m) \leqslant \|\phi\| \cdot \|u - u_m\|_M$$

令 $m \to \infty$，由定理1.32，得 $\phi(u) \leqslant \|\phi\| \xi_0$.命 $f_i = v + \|\phi\| \phi_i$ $(i=1,2)$，则 $f_1 \neq f_2$. 又

$$f_i(u) = \int_G u(t)v(t)dt + \|\phi\| \phi_i(u)$$

$$= \int_G u(t)v(t)dt + \|\phi\| \xi_0 \geqslant \int_G u(t)v(t)dt + \phi(u) = f(u)$$

而由定理 1.38，$\|f_i\|_N = \|v\|_N + \|\phi\| \cdot \|\phi_i\| = \|f\|_N = 1$，故 u有两个不同支撑泛函 f_1，f_2，与u为光滑点矛盾.

定理 2.18 设 $p(u)$ 连续，则 $u \in L_M^*$是 L_M^* 的光滑点的充要条件是 $u \neq 0$且 u 的范数在$U(L_{(N)}^*)$ 上可达.

证 充分性. 由条件，存在 $v_0 \in U(L_{(N)}^*)$，v_0为u的支撑泛函

若u还有支撑泛函 $f=v+\phi$（其中 ϕ 为f的奇异部分），则 $\frac{f+v_0}{2}$

$=\frac{v+v_0}{2}+\frac{1}{2}\phi$ 也是u的支撑泛函。于是由定理1.42

$$1=\|v_0\|_{(N)}=\rho_N(v_0);\quad 1=\|f\|_{(N)}=\rho_N(v)+\|\phi\|$$

$$1=\left\|\frac{f+v_0}{2}\right\|_{(N)}=\rho_N\left(\frac{v_0+v}{2}\right)+\frac{1}{2}\|\phi\|$$

从而由 $N(v)$ 的凸性有

$$1=\rho_N\left(\frac{v_0+v}{2}\right)+\frac{1}{2}\|\phi\|\leqslant\frac{1}{2}\rho_N(v_0)+\frac{1}{2}\rho_N(v)$$

$$+\frac{1}{2}\|\phi\|=1$$

这说明$\rho_N\left(\frac{v_0+v}{2}\right)=\frac{1}{2}\rho_N(v_0)+\frac{1}{2}\rho_N(v)$。又$p(u)$ 连续意味着

$N(v)$严格凸，因此导出$v_0(t)\overset{a.e.}{=\!=}v(t)$。而这又导致 $\rho_N(v)=\rho_N(v_0)=1$，这样就有 $\phi=\theta$ 故得$f=v_0$，即 u 是光滑点。

必要性的证明与定理2.17雷同，这里从略。

定理 2.19 下述命题等价

(1) $L_{(M)}^*$ 光滑；

(2) L_M^*光滑；

(3) $M(u)\in\Delta_2$且 $p(u)$ 连续。

证 由定理2.15和2.16定理知 (3) ⇒ (1)，(3)⇒ (2)。反之，$L_{(M)}^*$ (L_M^*)光滑时 $E_{(M)}(E_M)$ 光滑，由定理 2.15，定理2.16，从 (1) 或 (2) 均能推出 $p(u)$连续。若$M(u)\overline{\in}\Delta_2$，则$(L_{(M)}^*)^*\underset{\neq}{\supset}L_N^*$。由Bishop-Phelps 定理，$(L_{(M)}^*)^*$ 中能在$U(L_{(M)}^*)$上达到范数的泛函全体在$(L_{(M)}^*)^*$中稠，故必存在$f=v+\phi\in(L_{(M)}^*)^*$

其奇异部分 $\phi \neq \theta$ 使 $\|f\|_N=1$能在$U(L_{(M)}^*)$中某元u上达到。这样依定理2.17，u不是光滑点，从而$L_{(M)}^*$ 不光滑。于是得(1) ⇒ (3)。类似可证 (2) ⇒ (3)。

定理 2.20 下述命题等价

(1)$L_{(M)}^*$强光滑；

(2) $L_{(M)}^*$很光滑；

(3) L_M^*强光滑；

(4) L_M^*很光滑；

(5) $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$ 且 $p(u)$ 连续。

证 (1) ⇒ (2) 显然。

(2) ⇒ (5) 因很光滑蕴涵光滑，由定理2.19，$M(u)\in\Delta_2$且$p(u)$连续。又 X^*很光滑时X自反，联系E_N的共轭空间是$L_{(M)}^*$，知E_N自反。于是由

$$L_N^*\supset E_N=E_N^{**}=(L_{(M)}^*)^*\supset L_N^*,$$

得 $E_N=L_N^*$。这等价于$M(u)\in\nabla_2$。

(5) ⇒ (1) 因 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$且 $p(u)$ 连续等价于 L_N^*局部一致凸，根据X^*局部一致凸时X是F可微的，因而是强光滑的，得到$E_{(M)}$强光滑。再由$M(u)\in\Delta_2$ 知 $L_{(M)}^*$强光滑。

完全相仿可证 (3) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (3)

定理 2.21 下述命题等价

(1) $L_{(M)}^*$一致光滑；

(2) L_M^*一致光滑；

(3)　$N(v)\in\Delta_2$ 且 $N(v)$ 一致凸。

证　因定理中各款都蕴涵自反，而此时 $L_{(M)}^*$ 与 L_N^* 对偶，L_M^* 与 $L_{(N)}^*$ 与对偶，结合一致光滑与一致凸的完全对偶性即知定理的正确性。

附记　定理 2.1,2.3属于劳炳元、朱熹平〔1〕.定理2.2,2.4的直接证明首先见于吴从炘等的〔2〕.定理 2.5,2.6 取之于A.Kaminska的[3]，王廷辅、陈述涛的〔7〕和石忠锐的〔9〕。定理 2.7选自 A.Kaminska的〔4〕和陈述涛、王玉文的〔10,12〕。定理 2.8,2.12, 2.14, 2.16, 2.18,2.20和引理2.6均属于陈述涛〔12,13,14,15〕.定理 2.9 参看崔云安的〔16〕。定理 2.10, 引理 2.1, 2.2, 2.4 见于陈述涛、王玉文的〔11〕。定理2.11属于王廷辅、王玉文、李岩红〔17〕和A.Kaminska、W.Kurc〔6〕.定理2.13见于A.Kaminska的〔5〕.定理2.15, 2.17, 2.19, 2.21,取自王廷辅、陈述涛的〔7〕.

参 考 文 献

〔1〕劳炳元、朱熹平，Orlicz空间的端点，中山大学学报，(1983)，no.2, 27—36.

〔2〕吴从炘、赵善中、陈俊澳，关于 Orlicz 空间范数的计算公式与严格赋范的条件，哈尔滨工业大学学报，(1978), no.2, 1—12

〔3〕A.Kaminska, On uniform convexity of Orlicz spaces, Indag. Math., A85(1982), 27—36.

〔4〕______, The criteria for local uniform rotundity of Orlicz spaces, Studia Math., 79(1984), 201—215.

〔5〕______, On some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces, Suppl. Rend. Circ. Math. Paler., 2(1984), no.5, 63—72.

〔6〕A.Kaminska; W.Kurc, Weak uniform rotundity in Orlicz spaces, Math. Z.(待发表).

〔7〕王廷辅、陈述涛，Orlicz空间的k凸性，哈尔滨师范大学学报，（1985），no.4，11—15.

〔8〕____________，Orlicz 空间的光滑性和可微性，数学研究与评论，6(1986),no.1,62.

〔9〕石忠锐，Orlicz 空间的 k 一致凸性（待发表）.

〔10〕陈述涛、王玉文，Orlicz 空间的局部一致凸条件，数学杂志，5（1985），no,1，9—14.

〔11〕____________，H-property of Orlicz spaces，数学年刊（待发表）.

〔12〕王廷辅、陈述涛、王玉文，Weakly convexity and local convexity of Orlicz spaces，数学进展，14(1985)，283—284，

〔13〕陈述涛，Orlicz 空间的局部一致凸性，哈尔滨师范大学学报，（1983），no.2，48-56.

〔14〕____________，Some rotundities of Orlicz spaces with Orlicz norm（待发表）.

〔15〕____________，Smoothness of Orlicz spaces，Comment.Math.（待发表）.

〔16〕崔云安，Orlicz 空间中点局部--致凸条件（待发表）.

〔17〕王廷辅、王玉文、李岩红，Orlicz 空间的弱一致凸条件（待发表）.

〔18〕T. Ando，J. Fac.Hokkido Univ. Ser.,(1959),no.1 62—65.

〔19〕陈述涛，二次对偶各向一致凸的非自反Banach空间（待发表）.

第三章　非方性、非$l_n^{(1)}$性与平坦性

非方性、非 $l_n^{(1)}$ 性以及平坦性是 Banach 空间的重要几何性质，它们与凸性以及光滑性从不同的侧面，刻画了空间中单位球的“几何形状”，揭示了空间诸性质的内在联系。

本章着重讨论 Orlicz 空间的非方性、非 $l_n^{(1)}$性以及平坦性的各种判据，它也可看成是第二章内容的一种继续。

作为必要的准备，在 §1中先来考察 Orlicz 空间的同构子空间问题，即是否有子空间与 c_0、l^∞ 或l^1同构。这问题本身也是 Banach 空间几何理论的一个重要方面。

§1　同构子空间

定理 3.1　下述命题等价

(1)　$L^*_{(M)}$不含与c_0同构的子空间；

(2)　$L^*_{(M)}$不含与l^∞同构的子空间；

(3)　$L^*_{(M)}$不含与l^∞等距同构的子空间；

(4)　$M(u)\in\Delta_2$。

证　(1) ⇒ (2)，(2) ⇒ (3) 明显。

(3) ⇒ (4) 用反证法，设$M(u)\overline{\in}\Delta_2$。

无碍一般性，不妨假定 $\text{mes}G=1$，取G的一列两两不交的子集列$\{G_n\}_{n=1}^\infty$，使得

$$0<\text{mes}\,G_n\leqslant\frac{1}{2^n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

对每个固定的自然数 n，由于 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，必有一递增列 $\{u_i^{(n)}\}_{i=1}^\infty$，满足

$$M(u_i^{(n)})>\frac{1}{\text{mes}G_n}$$

$$M\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k^{(n)}\right]>2^k M(u_k^{(n)}) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

再选取G_n的一列两两不交的子集列$\{G_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\text{mes}G_{n,k}=\frac{1}{2^{k+n}M(u_k^{(n)})} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

定义

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(n)}\chi_{G_{n,k}}(t) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

则有

$$\rho_M(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})\text{mes}G_{n,k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}M(u_k^{(n)})\frac{1}{2^{k+n}M(u_k^{(n)})}$$

$$=\frac{1}{2^n} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

另一方面，对任意 $\lambda>1$，取 k_0 充分大，使得当 $k\geqslant k_0$ 时，$1+\frac{1}{k}\leqslant\lambda$，从而

$$\rho_M(\lambda x_n)\geqslant\sum_{k=k_0}^{\infty}M\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k^{(n)}\right]\text{mes}G_{n,k}$$

$$>\sum_{k=k_0}^{\infty}2^k M(u_k^{(n)})\cdot\frac{1}{2^{k+n}M(u_k^{(n)})}$$

$$=\infty$$

于是$\|x_n\|_{(M)}=1 \qquad (n=1,2,\cdots)$.

令 $X_0=\{x_\xi: x_\xi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n x_n(t), \xi=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in L^\infty\}$

首先注意

$$\rho_M\left(\frac{x_\xi}{\|\xi\|_\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M\left[\frac{|\xi_n|}{\|\xi\|_\infty}x_n(t)\right]dt$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M(x_n(t))dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

又对任意 $0<\varepsilon<\|\xi\|_\infty$，由于$\|\xi\|_\infty=\sup_n|\xi_n|$，可选取 $n_0\geqslant1$，满足 $|\xi_{n_0}|>\|\xi\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}$，即有

$$\frac{|\xi_{n_0}|}{\|\xi\|_\infty-\varepsilon}>\frac{\|\xi\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}}{\|\xi\|_\infty-\varepsilon}=\lambda_\varepsilon>1$$

这样一来

$$\rho_M\left(\frac{x_\xi}{\|\xi\|_\infty-\varepsilon}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}\left[M\frac{|\xi_n|}{\|\xi\|_\infty-\varepsilon}x_n(t)\right]dt$$

$$\geqslant\int_{G n_0}M[\lambda_\varepsilon x_{n_0}(t)]dt$$

$$=+\infty$$

由范数$\|\cdot\|_{(M)}$的定义，$\|\xi\|_\infty=\|x_\xi\|_{(M)}$。

X_0显然为$L^*_{(M)}$的子空间，而且与空间l^∞线性同构，所以 X_0与l^∞等距同构，与 (3) 矛盾。

(4) ⇒ (1) 因为$M(u)\in\Delta_2$，由定理1.46便知空间$L^*_{(M)}$弱序列完备。假如$L^*_{(M)}$有子空间与空间c_0同构，则c_0必为弱序列完备的，此为矛盾。

由范数$\|\cdot\|_{(M)}$与$\|\cdot\|_M$ 的等价性，立刻有定理3.2.

定理 3.2 下述命题等价

(1) $L^*_{(M)}$不含与c_0同构的子空间；

(2) $L^*_{(M)}$不含与l^∞同构的子空间；

(3) $M(u)\in\Delta_2$。

注 事实上，当 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$ 时，L^*_M也不含与l^∞等距同构的子空间(参见定理3.8)。

为了证明定理 3.3，我们回忆一个熟知的事实：弱序列完备

的 Banach 空间，如果不含与 l^1 同构的子空间，则必自反（见定理0.18）.

定理 3.3 $L^*_{(M)}$（或L^*_M）自反的充分必要条件是 $L^*_{(M)}$（或L^*_M）不含与c_0或 l^1 同构的子空间.

证 仅需证充分性.

因$L^*_{(M)}$不含与c_0同构的子空间，由定理3.1，$M(u)\in\Delta_2$，从而$L^*_{(M)}$弱序列完备，再由$L^*_{(M)}$不含与l^1同构的子空间，便知$L^*_{(M)}$自反.

§2 一致非方性与一致非$l_n^{(1)}$性

定理 0.31 已经得到 Banach 空间的一致非$l_2^{(1)}$性等价于一致非方性。本节将指出，对于Orlicz 空间，有更进一步的结果，即一致非$l_n^{(1)}$性 $(n\geqslant 2)$ 以及一致非方性均与自反性等价.

引理 3.1 设$M(u)\in\Delta_2$，x_n，$y_n\in S(L^*_{(M)})$而且

$$\max\{\|x_n+y_n\|_{(M)},\ \|x_n-y_n\|_{(M)}\}<1+\frac{1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则 $\rho_M(|x_n|-|y_n|)\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$.

证 由$M(u)$的凸性，对任意 $t\in G$，$n\geqslant 1$，有

$$a_n(t)=\frac{1}{2}[M(x_n(t)+y_n(t))+M(x_n(t)-y_n(t))]$$

$$\geqslant\max\{M(y_n(t)),M(x_n(t))\}\tag{3.1}$$

又由已知条件易见 $2\leqslant\|x_n+y_n\|_{(M)}+\|x_n-y_n\|_{(M)}\leqslant 2+\dfrac{2}{n}$，

从而 $\|x_n\pm y_n\|_{(M)}\to 1\quad(n\to\infty)$，于是由 $M(u)\in\Delta_2$ 与 (3.1) 式即得

$$1=\rho_M(x_n)\leqslant\int_G a_n(t)dt\to 1\qquad(n\to\infty)$$

$$1=\rho_M(y_n)\leqslant\int_G a_n(t)dt\to 1\qquad(n\to\infty)\tag{3.2}$$

因此，据（3.1）、（3.2）式，并顾及到

$$M(|u|-|v|)\leqslant|M(u)-M(v)|$$

便有

$$\rho_M(|x_n|-|y_n|)\leqslant\int_G|M(x_n(t))-My_n(t))|dt$$

$$\leqslant\int_G[a_n(t)-M(x_n(t))]\,dt+\int_G[a_n(t)-M(y_n(t))]\,dt$$

$$\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)$$

引理 3.2 如果有x_n，$y_n\in S(L_M^*)$，满足

$$\max\{\|x_n+y_n\|_M,\ \|x_n-y_n\|_M\}<1+\frac{1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{3.3}$$

则

$$\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\int_G M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(|x_n(t)|-|y_n(t)|)\right]dt\to 0\qquad(n\to\infty)$$

这里k_n，h_n满足

$$\|x_n+y_n\|_M=\frac{1}{k_n}\{1+\int_G M[k_n(x_n(t)+y_n(t))]dt\}$$

$$\|x_n-y_n\|_M=\frac{1}{h_n}\{1+\int_G M[h_n(x_n(t)-y_n(t))]dt\}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

证 由$M(u)$的凸性和（3.3）式，对一切$n\geqslant 1$，有

$$2+\frac{2}{n}>\|x_n+y_n\|_M+\|x_n-y_n\|_M$$

$$=\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left\{1+\int_G\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}M(k_n(x_n(t)+y_n(t)))\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_n}{k_n+h_n}M(h_n(x_n(t)-y_n(t)))\right]dt\right\}$$

$$\geqslant\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left\{1+\int_G M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}2x_n(t)\right]dt\right\}$$

$$\geqslant\|2x_n\|_M=2\tag{3.4}$$

同理可证

$$2+\frac{2}{n}>\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left\{1+\int_G\left[\frac{h_n}{k_n+h_n}M(k_n(x_n(t)+y_n(t)))\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_n}{k_n+h_n}M(h_n(x_n(t)-y_n(t)))\right]dt\right\}$$

$$\geqslant\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left\{1+\int_G M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}2y_n(t)\right]dt\right\}$$

$$\geqslant 2$$

从而据$M(|u|-|v|)\leqslant|M(2u)-M(2v)|$即得

$$\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\int_G M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}(|x_n(t)|-|y_n(t)|)\right]dt$$

$$\leqslant\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\int_G\left|M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}2x_n(t)\right]-M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}2y_n(t)\right]\right|dt$$

$$<\frac{4}{n}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

定理 3.4 下述命题等价

(1) $L_{(M)}^{*}$一致非方；

(2) $L_{(M)}^{*}$一致非$l_n^{(1)}$ $(n\geqslant 2)$；

(3) $L_{(M)}^{*}$为B-凸空间；

(4) $L_{(M)}^{*}$自反；

(5) $M(u)\in\Delta_2$且存在$\delta>0$，$u_0>0$，使得

$$M(2u)\geqslant(2+\delta)M(u)\qquad u\geqslant u_0$$

证 由定理0.31、定理0.36，知 (1) ⇒ (2) 、(2) ⇒(3) 均显然，由定理0.32，$L_{(M)}^{*}$为B-凸空间，蕴涵$L_{(M)}^{*}$不含子空间与c_0 或 l^1 同构，从而由定理 3.3，知$L_{(M)}^{*}$自反，即有 (3) ⇒ (4) .由于$L_{(M)}^{*}$自反等价于 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$，从而由定理1.18的 (5) 可得 (4)⇔(5).为完成证明，只须证 (5) ⇒ (1)。

(5) ⇒ (1) 由 (5)，并注意到$M(2u)>2M(u), u\neq 0$，我们可假设u_0，$\delta>0$满足条件

$$M(u_0)\text{mes}G = 1-\alpha<1 \tag{3.5}$$

且$M(2u)>(2+\delta)M(u)$ $(u\geqslant u_0)$。

因为$M(u)\in\Delta_2$，据定理1.34，存在$l>1$，使得 $\rho_M(x)\geqslant 1+\frac{\delta\alpha}{4}$ 蕴涵$\|x\|_{(M)}\geqslant l$。

如果 (1) 不真，则有 x_n，$y_n\in S(L^*_{(M)})$，满足

$$\max\{\|x_n+y_n\|_{(M)}, \|x_n-y_n\|_{(M)}\}<1+\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

从而由引理 3.1，有

$$\rho_M(|x_n|-|y_n|)\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{3.6}$$

注意到 $\rho_M(2x_n)=\rho_M(|x_n|+|y_n|+|x_n|-|y_n|)$，由引理 1.3 与 (3.6)，即知有$n_0\geqslant 1$，使得当$n\geqslant n_0$时

$$|\rho_M(2x_n)-\rho_M(|x_n|+|y_n|)|<\frac{\delta\alpha}{2} \tag{3.7}$$

但由 (3.5)

$$\begin{aligned}\int_{G(|x_n(t)|\geqslant u_0)} M(x_n(t))\,dt &= \int_G M(x_n(t))\,dt-\int_{G(|x_n(t)|<u_0)} M(x_n(t))dt \\ &\geqslant 1-M(u_0)\text{mes}G \\ &=\alpha \qquad (n=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{3.8}$$

于是，由 (3.7)、(3.5)、(3.8) 式，便得到

$$\begin{aligned}&\int_G [M(x_n(t)+y_n(t))+M(x_n(t)-y_n(t))]dt \\ &\geqslant \int_G M(|x_n(t)|+|y_n(t)|)dt \\ &\geqslant \int_G M(2x_n(t))\,dt-\frac{\delta\alpha}{2}\end{aligned}$$

$$=\int_{G(|x_n(t)|\geq u_0)} M(2x_n(t))dt+\int_{G(|x_n(t)|<u_0)} M(2x_n(t))dt-\frac{\delta\alpha}{2}$$

$$\geq(2+\delta)\int_{G(|x_n(t)|\geq u_0)} M(x_n(t))dt+2\int_{G(|x_n(t)|<u_0)} M(x_n(t))dt-\frac{\delta\alpha}{2}$$

$$=2-\frac{\delta\alpha}{2}+\delta\int_{G(|x_n(t)|\geq u_0)} M(x_n(t))dt$$

$$\geq 2+\frac{\delta\alpha}{2} \qquad (n\geq n_0)$$

因而当$n\geq n_0$时

$$\max\{\rho_M(x_n+y_n),\ \rho_M(x_n-y_n)\}\geq 1+\frac{\delta\alpha}{4}$$

即有

$$\max\{\|x_n+y_n\|_{(M)},\ \|x_n-y_n\|_{(M)}\}\geq l>1$$

这与 $$\max\{\|x_n+y_n\|_{(M)},\|x_n-y_n\|_{(M)}\}<1+\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

矛盾，故（1）为真。

定理 3.5 下述命题等价

(1) L_M^* 一致非方；

(2) L_M^* 一致非$l_n^{(1)}$ $(n\geq 2)$；

(3) L_M^* 为B-凸空间；

(4) L_M^* 自反；

(5) $M(u)\in\Delta_2$且存在u_0、$\delta>0$，使得

$$M(2u)\geq(2+\delta)M(u) \qquad u\geq u_0$$

证 由定理3.4的证明可知，仅须证（4）⇒（1）.

如果L_M^* 不是一致非方，则有 x_n，$y_n\in S(L_M^*)$，满足

$$\max\{\|x_n+y_n\|_M,\ \|x_n-y_n\|_M\}<1+\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

由定理1.27，存在k_n、h_n，使得

$$\|x_n+y_n\|_M=\frac{1}{k_n}\{1+\rho_M[k_n(x_n+y_n)]\}$$

$$\|x_n - y_n\|_M = \frac{1}{h_n}\{1 + \rho_M[h_n(x_n - y_n)]\} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

从而据引理 3.2，即有

$$\frac{k_n + h_n}{k_n h_n}\rho_M\left[\frac{k_n h_n}{k_n + h_n}(|x_n| - |y_n|)\right] \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{3.9}$$

因为 $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{n} < \|x_n + y_n\|_M$、$\|x_n - y_n\|_M < 1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{3}{2}$

对充分大的 n 成立，由定理1.28，$\{k_n、h_n，n = 1, 2, \cdots\}$有界.

无碍一般性，设$h_n \geqslant k_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$（必要时可选子列）.令 $k_0 = \inf\limits_n k_n$，$H_0 = \sup\limits_n h_n$，则 $H_0 < \infty$，$k_0 > 0$，而且

$$\frac{k_0}{2} = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0}} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{k_n} + \frac{1}{h_n}} = \frac{k_n h_n}{k_n + h_n} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H_0}} = \frac{H_0}{2}$$

$(n = 1, 2, \cdots)$. 从而由（3.9）式推得

$$\frac{2}{H_0}\rho_M\left[\frac{k_0}{2}(|x_n| - |y_n|)\right] \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

由于$M(u) \in \Delta_2$，所以在L_M^* 中按模收敛等价于按范数收敛，于是

$$\||x_n| - |y_n|\|_M \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

再由$k_n \leqslant H_0 < \infty$ $(n = 1, 2, \cdots)$，又有

$$\rho_M[k_n(|x_n| - |y_n|)] \leqslant \rho_M[H_0(|x_n| - |y_n|)] \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{3.10}$$

仍借助 $M(u) \in \Delta_2$，从$\|2k_n x_n\|_M \leqslant 2H_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$，可知有 $C > 0$，使得

$$\rho_M[2k_n x_n] \leqslant C \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

由引理 1.3，有$\delta > 0$，使当u，$v \in L_M^*$，$\rho_M(u) \leqslant C$，$\rho_M(v) \leqslant \delta$时

$$\rho_M(u + v) > \rho_M(u) - \frac{k_0}{2H_0} \tag{3.11}$$

而利用（3.10）式，存在 n_0，对于$n \geqslant n_0$

$$\rho_M[k_n(|x_n| - |y_n|)] \leqslant \delta \tag{3.12}$$

令

$$G_n=\{t:t\in G,\ x_n(t)y_n(t)\geqslant 0\}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

则由（3.11）、（3.12）式，并顾及到$\frac{M(u)}{u}$的单调增加性，便知当$n\geqslant n_0$时

$$2+\frac{2}{n}>\|x_n+y_n\|_M+\|x_n-y_n\|_M$$

$$\geqslant\frac{1}{k_n}\{1+\int_{G_n}M[k_n(|x_n(t)|+|y_n(t)|)]dt\}$$

$$+\frac{1}{h_n}\{1+\int_{G\setminus G_n}M[h_n(|x_n(t)|+|y_n(t)|)]dt\}$$

$$\geqslant\frac{1}{H_0}+\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\rho_M[k_n(|x_n|+|y_n|)]$$

$$=\frac{1}{H_0}+\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\rho_M[k_n|2x_n|+k_n(|y_n|-|x_n|)]$$

$$>\frac{1}{H_0}+\frac{1}{k_n}\{1+\rho_M[k_n2x_n]\}-\frac{1}{k_n}\cdot\frac{k_0}{2H_0}$$

$$\geqslant\|2x_n\|_M+\frac{1}{2H_0}$$

$$=2+\frac{1}{2H_0}\qquad (3.13)$$

此为矛盾，故L_M^*一致非方。

由定理0.35、0.36，立刻有定理 3.6

定理 3.6 下述命题等价

(1) $L_M^*(L_{(M)}^*)$一致非方；

(2) $L_M^*(L_{(M)}^*)$超自反；

(3) $L_M^*(L_{(M)}^*)$有等价一致凸范数；

(4) $L_M^*(L_{(M)}^*)$有等价一致凸且一致光滑范数；

(5) $L_M^*(L_{(M)}^*)$有超BS性质；

(6) $L_M^*(L_{(M)}^*)$有超RN性质；

(7) $L_M^*(L_{(M)}^*)$有超KM性质；

(8) $L_M^*(L_{(M)}^*)$有BS性质；

(9) $L_M^*(L_{(M)}^*)$自反。

§ 3 非方性与局部一致非方性

上节已证明：L_M^*与$L_{(M)}^*$的一致非方性等价，然而L_M^*与$L_{(M)}^*$的（局部一致）非方性却全然不同。

首先证明两个辅助命题。

引理 3.3 空间l^∞不是非方的

证 取 $x=(1,0,\cdots)$，$y=(0,1,0\cdots)$，则

$$\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=\|x\pm y\|_\infty=1$$

这说明L^∞不是非方的。

引理 3.4 对 $x\in L_M^*$，$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，只要 $e\subset G$,mes $e<\delta$，就有

$$\|x\chi_{G\setminus e}\|_M>\|x\|_M-\varepsilon$$

证 因为 $x\in L_M^*$，故存在$y\in L_N^*$，$\rho_N(y)\leqslant 1$ 满足

$$\int_G x(t)y(t)\,dt>\|x\|_M-\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.14}$$

再由积分的绝对连续性，有 $\delta>0$，只要$e\subset G$，mes $e<\delta$，就有

$$\int_e x(t)y(t)dt<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.15}$$

从而

$$\begin{aligned}\|x\chi_{G\setminus e}\|_M&\geqslant\int_{G\setminus e}x(t)y(t)dt\\&=\int_G x(t)y(t)dt-\int_e x(t)y(t)dt\\&>\|x\|_M-\varepsilon\end{aligned}$$

定理 3.7 下述命题等价

(1) $L_{(\overset{*}{M})}$ 局部一致非方；

(2) $L_{(\overset{*}{M})}$ 非方；

(3) $M(u)\in\Delta_2$。

证 (1)⇒(2) 是显然的。(2)⇒(3) 设 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，由定理 3.1，空间$l^\infty$可等距嵌入 $L_{(\overset{*}{M})}$，再由引理3.3，便知$L_{(\overset{*}{M})}$不是非方的，这与（2）矛盾。

(3) ⇒ (1)

首先注意，当 $u\neq 0$ 时，$M(2u)>2M(u)$，从而对一切 $x\in S(L_{(\overset{*}{M})})$，$a=\rho_M(2x)-2\rho_M(x)>0$。

因为$M(u)\in\Delta_2$，由定理 1.34，有 $l>1$，使得 $\rho_M(y)\geq 1+\frac{a}{4}$蕴涵$\|y\|_{(M)}\geq l$。

如果 (1) 不真，则有 $x\in S(L_{(\overset{*}{M})}),y_n\in S(L_{(\overset{*}{M})})$，满足

$$\max\{\|x+y_n\|_{(M)},\ \|x-y_n\|_{(M)}\}<1+\frac{1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{3.16}$$

由引理 3.1

$$\rho_M(|x|-|y_n|)\to 0\quad(n\to\infty)\tag{3.17}$$

注意到$\rho_M(2x)=\rho_M(|x|+|y_n|+|x|-|y_n|)$ $(n=1,2,\cdots)$，再由引理 1.3 与 (3.17) 式，存在$n_0\geq 1$，使得当$n\geq n_0$时

$$|\rho_M(2x)-\rho_M(|x|+|y_n|)|<\frac{a}{2}$$

设 $G_n=\{t\in G:x(t)y_n(t)\geq 0\}\qquad(n=1,2,\cdots)$

于是当$n\geq n_0$时，便得到

$$\rho_M(x+y_n)+\rho_M(x-y_n)$$
$$=\int_{G_n}M[|x(t)|+|y_n(t)|]dt+\int_{G\setminus G_n}M[|x(t)|-|y_n(t)|]dt$$

$$+\int_{G_n} M[|x(t)|-|y_n(t)|]dt+\int_{G\setminus G_n} M[|x(t)|+|y_n(t)|]dt$$

$$\geqslant \rho_M(|x|+|y_n|)$$

$$\geqslant \rho_M(2x)-\frac{a}{2}$$

$$=2\rho_M(x)+a-\frac{a}{2}=2+\frac{a}{2}$$

因此当$n\geqslant n_0$时

$$\max\{\rho_M(x+y_n),\rho_M(x-y_n)\}\geqslant 1+\frac{a}{4}$$

从而当$n\geqslant n_0$时

$$\max\{\|x+y_n\|_{(M)},\ \|x-y_n\|_{(M)}\}\geqslant l>1$$

这与（3.16）式矛盾。

定理 3.8 L_M^* 局部一致非方，从而 L_M^* 非方。

证 如果L_M^* 不是局部一致非方的，则有$x,y_n\in S(L_M^*)$ $(n=1,2,\cdots)$，使得

$$\max\{\|x+y_n\|_M,\ \|x-y_n\|_M\}<1+\frac{1}{n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

由定理1.27，存在k_n，h_n 满足

$$\|x+y_n\|_M=\frac{1}{k_n}\{1+\rho_M[k_n(x+y_n)]\}.$$

$$\|x-y_n\|_M=\frac{1}{h_n}\{1+\rho_M[h_n(x-y_n)]\}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

从引理3.2证明中（3.4）式有

$$2+\frac{2}{n}\geqslant\frac{k_n+h_n}{k_nh_n}\left\{1+\rho_M\left[\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}2x(t)\right]\right\}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

因为$x(t)$为固定元，从而 $b=\sup\limits_n\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}<\infty$，

且$a=\inf\limits_n\frac{k_nh_n}{k_n+h_n}>0$，再由引理3.2立刻得到

$$\frac{1}{b}\rho_M[a(|x|-|y_n|)]\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

从而

$$|y_n(t)|\xrightarrow{\mu}|x(t)| \qquad (n\to\infty)$$

这里"$\xrightarrow{\mu}$"表示按测度收敛.

不失一般性（必要时可选子列），设$h_n\geqslant k_n$（$n=1,2,\cdots$），$k_0=\lim\limits_{n\to\infty}k_n$，$h_0=\lim\limits_{n\to\infty}h_n$ 而且

$$\lim_{n\to\infty}|y_n(t)|=|x(t)| \qquad a.e.\text{于 } G$$

此处k_0、h_0可以为$+\infty$

下面分三种情况讨论:

1. $k_0=h_0=+\infty$

此时$\dfrac{k_nh_n}{k_n+h_n}\to+\infty \quad (n\to\infty)$，矛盾.

2. $k_0\leqslant h_0<+\infty$

用引理 3.4，存在$\delta>0$，只要$e\subset G$，mes $e<\delta$，就有

$$\|2x\chi_{G\setminus e}\|_M>2-\frac{1}{2h_0}$$

取$G_0\subset G$，使得$\text{mes}(G\setminus G_0)<\delta$，并且还有$|y_n(t)|\to|x(t)|$（$n\to\infty$）关于$t\in G_0$一致成立. 于是由$\dfrac{M(u)}{u}$的单调性

$$\begin{aligned}
2+\frac{2}{n}&>\|x+y_n\|_M+\|x-y_n\|_M\\
&\geqslant\frac{1}{k_n}\{1+\int_{G_0(x(t)y_n(t)\geqslant 0)}M[k_n(x(t)+y_n(t))]dt\}\\
&\quad+\frac{1}{h_n}\{1+\int_{G_0(x(t)y_n(t)<0)}M[k_n(x(t)-y_n(t))]dt\}\\
&\geqslant\frac{1}{h_n}+\frac{1}{k_n}\{1+\int_{G_0}M[k_n(|x(t)|+|y_n(t)|)]dt\}
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，即得

$$2\geqslant\frac{1}{h_0}+\|2x\chi_{G_0}\|_M>\frac{1}{h_0}+2-\frac{1}{2h_0}=2+\frac{1}{2h_0}$$

此为矛盾。

3. $k_0<h_0=\infty$

首先注意到，对任何$\eta>0$，如果记

$$G_\eta=G(|x(t)|\geqslant\eta)$$
$$G_n=G(x(t)y_n(t)<0)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则

$$\mathrm{mes}(G_n\cap G_\eta)\to 0\quad(n\to\infty)\tag{3.18}$$

事实上，由于

$$2\geqslant\|x-y_n\|_M\geqslant\frac{1}{h_n}\int_{G_n\cap G_\eta}M[h_n(|x(t)|+|y_n(t)|)]dt$$
$$\geqslant\frac{1}{h_n}\int_{G_n\cap G_\eta}M[h_nx(t)]dt$$
$$\geqslant\frac{M(h_n\eta)}{h_n}\mathrm{mes}(G_n\cap G_\eta)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$\mathrm{mes}(G_n\cap G_\eta)\leqslant\frac{2h_n}{M(h_n\eta)}\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)$$

对任意的$\varepsilon>0$，再由引理 3.5，选$\delta>0$，使得当$e\subset G$，$\mathrm{mes}\,e<\delta$ 时

$$\|2x\chi_{G\setminus e}\|_M>2-\varepsilon\tag{3.19}$$

取$\{G_n\}$的子列，为简单记，仍用原来记号，满足

$$\mathrm{mes}(G_n\cap G_\varepsilon)<\frac{\delta}{2^{n+1}}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

又取$G_0\subset G$，$\mathrm{mes}\,G_0<\frac{\delta}{2}$，使得 $|y_n(t)|\to|x(t)|$ $(n\to\infty)$ 在 $G\setminus G_0$上一致成立。

令

$$G' = G_0 \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \cap G_\varepsilon) \right]$$

$$= G_0 \cup \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap G_\varepsilon \right]$$

则mes$G' < \delta$，而且

$$G \setminus G' \subset \left(G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cup \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \setminus \left(G_0 \cup G_\varepsilon \right) \right]$$

于是对一切$n \geqslant 1$，我们有

$$1 + \frac{1}{n} > \|x + y_n\|_M$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n}\{1 + \int_{G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt$$

$$+ \int_{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \setminus \left(G_0 \cup G_\varepsilon \right)} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt$$

$$- \int_{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \setminus \left(G_0 \cup G_\varepsilon \right)} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n}\{1 + \int_{G \setminus G'} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt$$

$$- \int_{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \setminus \left(G_0 \cup G_\varepsilon \right)} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt\}$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n}\{1 + \int_{G \setminus G'} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt$$

$$- \int_{G \setminus (G_0 \cup G_\varepsilon)} M[k_n(|x(t)| + |y_n(t)|)]dt\}$$

令 $n \to \infty$，便得到

$$1\geqslant\frac{1}{k_0}\{1+\int_{G\setminus G'}M[2k_0x(t)]dt-\int_{G\setminus(G_0\cup G_\varepsilon)}M[2k_0x(t)]dt\}$$

$$\geqslant\|2x\chi_{G\setminus G'}\|_M-\frac{1}{k_0}M(2k_0\varepsilon)\text{mes}G$$

$$\geqslant 2-\varepsilon-\frac{1}{k_0}M(2k_0\varepsilon)\text{mes}G$$

由ε的任意性，导致矛盾。

综合 1、2、3，即知L_M^* 局部一致非方。

§4 非$l_n^{(1)}$性与局部一致非$l_n^{(1)}$性

§3中已经证得：L_M^* 局部一致非方；本节将证明：L_M^* 局部一致非$l_2^{(1)}$的充分必要条件是$M(u)\in\nabla_2$，从而说明：Banach 空间的局部一致非方性与局部一致非$l_2^{(1)}$性并不等价。

引理 3.5 空间l^∞不是非$l_n^{(1)}$的。

证 设$\varepsilon_i=(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, \cdots, \varepsilon_i^n)$为$+1$与$-1$的任意一种排列，其中$\varepsilon_i^1=1$ $(i=1, 2, \cdots, 2^{n-1})$，令

$$x_j=\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\varepsilon_i^je_i\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

这里$e_i=(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{i},0,\cdots)$ $(i=1,2,\cdots,2^{n-1})$

则$x_j\in S(l^\infty)$ $(j=1,2,\cdots,n)$，而且

$$\min\|x_1\pm x_2\pm\cdots\pm x_n\|_\infty=n$$

此处min取自一切可能的正负号排列，从而引理获证。

定理 3.9 下述命题等价

(1) $L_{(M)}^*$局部一致非$l_2^{(1)}$；

(2) $L_{(M)}^*$局部一致非$l_n^{(1)}$ $(n\geqslant2)$；

(3) $L_{(M)}^*$非$l_n^{(1)}$ $(n\geqslant2)$；

(4) $M(u)\in\Delta_2$。

证 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) 显然

(3) $\Rightarrow$ (4) 如果 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，由定理3.1，$l^\infty$ 可等距嵌入 $L^*_{(M)}$，再由引理3.5，$L^*_{(M)}$ 不是非 $l^{(1)}_n$ 空间，与 (3) 矛盾.

(4) $\Rightarrow$ (1)

任取 $x,\ y\in S(L^*_{(M)})$，由 $M(u)\in\Delta_2$，便知

$$\rho_M(x)=\rho_M(y)=1$$

选 $c>0$，使得

$$G_1=\{t\in G: c^{-1}\leqslant|x(t)|\leqslant c\}$$

满足 $\rho_M(x\chi_{G_1})\geqslant\frac{7}{8}$. 再选 $d>0$，使

$$\frac{M(c)}{M(d)}\leqslant\frac{1}{8}\tag{3.20}$$

令

$$G_2=\{t\in G: |y(t)|\leqslant d\}$$

则有 $M(d)\mathrm{mes}(G\backslash G_2)<\rho_M(y\chi_{G\backslash G_2})\leqslant 1$，从而

$$\mathrm{mes}(G\backslash G_2)<\frac{1}{M(d)}\tag{3.21}$$

于是由 (3.20)、(3.21) 式得

$$\rho_M(x\chi_{G_1\backslash G_2})\leqslant M(c)\mathrm{mes}(G_1\backslash G_2)<\frac{M(c)}{M(d)}\leqslant\frac{1}{8}$$

记 $D=G_1\cap G_2$，则

$$\frac{7}{8}\leqslant\rho_M(x\chi_{G_1\backslash G_2})+\rho_M(x\chi_D)$$

$$\leqslant\frac{1}{8}+\rho_M(x\chi_D)$$

从而得到

$$\rho_M(x\chi_D)\geqslant\frac{3}{4}\tag{3.22}$$

又明显的有

$$2-\left[\rho_M\left(\frac{x+y}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

$$\geqslant\left[\rho_M(x\chi_D)+\rho_M(y\chi_D)\right]-\left[\rho_M\left(\frac{(x+y)\chi_D}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{(x-y)\chi_D}{2}\right)\right] \tag{3.23}$$

令 $\sigma=\sup\{2M\left(\frac{u}{2}\right)/M(u):\ u\in[c^{-1},d]\}$

$$D_1=\{t\in D:x(t)y(t)\geqslant 0\},D_2=D\backslash D_1$$

则

$$|x(t)-y(t)|\chi_{D_1}(t)\leqslant\max\{|x(t)|,|y(t)|\}\chi_{D_1}(t)$$
$$|x(t)+y(t)|\chi_{D_2}(t)\leqslant\max\{|x(t)|,|y(t)|\}\chi_{D_2}(t)$$

从而

$$\rho_M\left(\frac{(x+y)\chi_D}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{(x-y)\chi_D}{2}\right)$$

$$=\rho_M\left(\frac{(x+y)\chi_{D_1}}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{(x+y)\chi_{D_2}}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{(x-y)\chi_{D_1}}{2}\right)$$

$$+\rho_M\left(\frac{(x-y)\chi_{D_2}}{2}\right)\leqslant\frac{\rho_M(x\chi_{D_1})+\rho_M(y\chi_{D_1})}{2}$$

$$+\rho_M\left(\frac{\max\{|x|,|y|\}\chi_{D_2}}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{\max\{|x|,|y|\}\chi_{D_1}}{2}\right)$$

$$+\frac{\rho_M(x\chi_{D_2})+\rho_M(y\chi_{D_2})}{2}$$

$$=\frac{\rho_M(x\chi_D)+\rho_M(y\chi_D)}{2}+\rho_M\left(\frac{\max\{|x|,|y|\}\chi_D}{2}\right)$$

$$\leqslant\frac{\rho_M(x\chi_D)+\rho_M(y\chi_D)}{2}+\sigma\cdot\frac{\rho_M(\max\{|x|,|y|\}\chi_D)}{2}$$

$$\leqslant(1+\sigma)\frac{\rho_M(x\chi_D)+\rho_M(y\chi_D)}{2} \tag{3.24}$$

于是由式（3.23）、（3.24），有

$$2-\left[\rho_M\left(\frac{x+y}{2}\right)+\rho_M\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

$$\geqslant [\rho_M(x\chi_D)+\rho_M(y\chi_D)]-(1+\sigma)\frac{\rho_M(x\chi_D)+\rho_M(y\chi_D)}{2}$$

$$\geqslant \frac{1-\sigma}{2}\rho_M(x\chi_D)$$

$$\geqslant \frac{3(1-\sigma)}{8}=\eta$$

显然$\eta\in(0,1)$，而且只与x有关，由此即得

$$\min\left\{\rho_M\left(\frac{x+y}{2}\right),\quad \rho_M\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\}\leqslant 1-\frac{\eta}{2}$$

这样，因为$M(u)\in\Delta_2$，由定理1.34，便知存在 $\delta\in(0,1)$，使得

$$\min\left\{\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{(M)},\quad \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_{(M)}\right\}\leqslant 1-\delta$$

定理 3.10 下述命题等价

(1) L_M^* 局部一致非$l_2^{(1)}$；

(2) L_M^* 局部一致非$l_n^{(1)}$；

(3) $M(u)\in\nabla_2$

证 (1) $\Rightarrow$(2) 明显.

(2) $\Rightarrow$ (3)

选取集合$A\subset G$，满足 $0<\text{mes } A<\text{mes}G$，再选 $c>0$，使得$N(c)\text{mes } A=1$.

如果$M(u)\overline{\in}\nabla_2$，则存在 $a_i\uparrow+\infty$ $(i\to\infty)$ 满足 $N(a_1)\text{mes}(G\backslash A)\geqslant n$ 而且

$$N\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)a_i\right]>2^{n+i}N(a_i)\qquad(i=1,2,\cdots)$$

对于每一个自然数 $i=1,2,\cdots$，取 $G\backslash A$ 的两两不交子集$G_2^{(i)}$，$G_3^{(i)}$，…，$G_n^{(i)}$，使

$$N(a_i)\text{mes } G_k^{(i)}=\frac{1}{2^{n+i}}\qquad(k=2,3,\cdots,n)$$

由于 $\rho_N(c\chi_A)=1$，且

$$N\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)a_i\right]\mathrm{mes}G_k^{(i)} > 2^{n+i}N(a_i)\mathrm{mes}G_K^{(i)} = 1$$

所以，有

$$\|c\chi_A\|_{(N)} = 1$$

$$\|a_i\chi_{G_k^{(i)}}\|_{(N)} \geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{i}} = \frac{i}{i+1}$$

$(i=1,2,\cdots,k=2,3,\cdots,n)$，注意到

$$\sum_{k=2}^{n} N(a_i)\ \mathrm{mes}G_k^{(i)} = \frac{n-1}{2^{n+i}} \to 0 \qquad (i\to\infty)$$

从而存在 $c_i \uparrow c$ $(i\to\infty)$，使得

$$\rho_N\left(c_i\chi_A + \sum_{k=2}^{n} a_i\chi_{G_k^{(i)}}\right) = N(c_i)\ \mathrm{mes}A + \sum_{k=2}^{n} N(a_i)\mathrm{mes}G_k^{(i)}$$
$$= N(c)\mathrm{mes}A$$
$$= 1 \qquad (i=1,2,\cdots) \tag{3.25}$$

因为 $c\chi_A$，$a_i\chi_{G_k^{(i)}} \in E_{(N)}$ $(i=1,2,\cdots,k=2,\cdots,n)$，并注意到 $(E_{(N)})^* = L_M^*$，由Hahn－Banach定理存在 x_1，$x_2^{(i)}$，…，$x_n^{(i)} \in S(L_M^*)$，满足

$x_1(t) = x_1(t)\chi_A(t)$，$x_k^{(i)}(t) = x_k^{(i)}(t)\chi_{G_k^{(i)}}(t)$ 且

$$\begin{cases} 1 = \|c\chi_A\|_{(N)} = \int_G c\chi_A(t)x_1(t)\,dt = c\int_A x_1(t)\,dt \\ 1/\left(1+\frac{1}{i}\right) \leqslant \|a_i\chi_{G_k^{(i)}}\|_{(N)} \end{cases}$$

$$= \int_G a_i\chi_{G_k^{(i)}}(t)x_k^{(i)}(t)\,dt$$

$$= a_i\int_{G_k^{(i)}} x_k^{(i)}(t)\,dt \qquad (i=1,2,\cdots,k=2,\cdots,n)$$

$$\tag{3.26}$$

现在，对$\varepsilon_k^{(i)} = +1$或-1 $(i=1,2,\cdots,k=2,3,\cdots,n)$ 由式

(3.25)、(3.26)，便有

$$n \geqslant \|x_1 + \varepsilon_2^{(i)} x_2^{(i)} + \cdots + \varepsilon_n^{(i)} x_n^{(i)}\|_M$$

$$\geqslant \int_G [x_1(t) + \varepsilon_2^{(i)} x_2^{(i)}(t) + \cdots + \varepsilon_n^{(i)} x_n^{(i)}(t)][c_i \chi_A(t)$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k^{(i)} a_i \chi_{G_k^{(i)}}(t)]dt$$

$$= c_i \int_A x_1(t)dt + \sum_{k=2}^{n} a_i \int_{G_k^{(i)}} x_k^{(i)}(t)dt$$

$$\geqslant \frac{c_i}{c} + (n-1)/\left(1+\frac{1}{i}\right) \to n \quad (i \to \infty)$$

与（2）矛盾。

(3) ⇒ (1)

如果（1）不成立，则有x_0，$x_n \in S(L_M^*)$ $(n=1,2,\cdots)$ 满足

$$\|x_0 + x_n\|_M \to 2 \quad 且 \quad \|x_0 - x_n\|_M \to 2 \quad (n \to \infty)$$

由定理1.27，存在$k_n > 1$，使得

$$1 = \|x_n\|_M = \frac{1}{k_n}[1 + \rho_M(k_n x_n)] \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

从而由$M(u)$的凸性，得到

$$2 = \|x_n\|_M + \|x_0\|_M = \frac{k_n + k_0}{k_n k_0}\left[1 + \frac{k_0}{k_n + k_0}\rho_M(k_n x_n)\right.$$

$$\left. + \frac{k_n}{k_n + k_0}\rho_M(k_0 x_0)\right]$$

$$\geqslant \frac{k_n + k_0}{k_n k_0}\left[1 + \rho_M\left(\frac{k_0 k_n}{k_n + k_0}(x_n + x_0)\right)\right]$$

$$\geqslant \|x_n + x_0\|_M \to 2 \quad (n \to \infty) \tag{3.27}$$

同理，又有

$$2 = \|x_n\|_M + \|x_0\|_M = \frac{k_n + k_0}{k_n k_0}\left[1 + \frac{k_0}{k_n + k_0}\rho_M(k_n x_n)\rho_M(k_0 x_0)\right]$$

$$\geqslant \frac{k_n + k_0}{k_n k_0}\left[1 + \rho_M\left(\frac{k_0 k_n}{k_n + k_0}(x_n - x_0)\right)\right]$$

$$\geqslant \|x_n - x_0\|_M \to 2 \qquad (n\to\infty) \tag{3.28}$$

因为 $\dfrac{k_n k_0}{k_n + k_0} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{k_0}+\dfrac{1}{k_n}} > \dfrac{1}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$，并顾及：

$M(|u|-|v|)\leqslant|M(u)-M(v)|$，于是由（3.27）、（3.28）式，立即可得

$$\frac{1}{k_0}\rho_M\left(\frac{1}{2}(|x_n+x_0|-|x_n-x_0|)\right)$$

$$<\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\rho_M\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(|x_n+x_0|+|x_n-x_0|)\right)$$

$$\leqslant\left|\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\rho_M\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(x_n+x_0)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{k_n+k_0}{k_nk_0}\rho_M\left(\frac{k_nk_0}{k_n+k_0}(x_n-x_0)\right)\right|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

由此推知：$|x_n(t)+x_0(t)|-|x_n(t)-x_0(t)|\xrightarrow{\mu}0$ $(n\to\infty)$，注意到明显的事实：

$$||x_n(t)+x_0(t)|-|x_n(t)-x_0(t)||=2|x(t)|\text{或}2|x_0(t)|$$

$(n=1,2,\cdots)$，则在集合 $G_0=\{t\in G: x_0(t)\neq 0\}$ 上，$x_n(t)\xrightarrow{\mu}0$ $(n\to\infty)$．不失一般性，我们可以假定 $x_n(t)\xrightarrow{a\cdot e\cdot}0(n\to\infty)$（否则，考虑$\{x_n\}$的几乎处处收敛的子列）．

由于$x_0\neq\theta$，故有$\beta>0$、$\delta>0$，使得当$e\subset G$, $\mathrm{mes}e<\delta$时

$$\int_{G\setminus e} M(x_0(t))dt>\beta$$

因而由 $k_0>1$，有

$$1=\|x_0\|_M=\frac{1}{k_0}\left[1+\int_{G\setminus e}M(k_0x_0(t))dt+\int_e M(k_0x_0(t))dt\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{k_0}\int_{G\setminus e}M(k_0x_0(t))dt+\|x_0\chi_e\|_M$$

$$>\beta+\|x_0\chi_e\|_M \tag{3.29}$$

因为在G_0上 $x_n(t)\xrightarrow{a\cdot e\cdot}0$ $(n\to\infty)$，故可选 $G'\subset G_0$，满足 $\text{mes}G'<\delta$，并在$G_0\setminus G'$上，

$$x_n(t)\xrightarrow{u}0 \quad (n\to\infty) \tag{3.30}$$

这里"$\xrightarrow{u}$"表示一致收敛.

由于$\|x_n+x_0\|_M\to 2$ $(n\to\infty)$，选$v_n\in L_N^*$，满足$\rho_N(v_n)\leqslant 1$ $(n=1,2,\cdots)$ 与

$$\int_G[x_n(t)+x_0(t)]v_n(t)dt\to 2 \quad (n\to\infty)$$

由此立刻有

$$\int_G x_0(t)v_n(t)dt\to 1 \text{且} \int_G x_n(t)v_n(t)dt\to 1 \quad (n\to\infty)$$

据 (3.30) 式，即知

$$\begin{aligned}1&\geqslant\|v_n\chi_{G'\cup(G\setminus G_0)}\|_{(N)}\\&=\|x_n\|_M\|v_n\chi_{G'\cup(G\setminus G_0)}\|_{(N)}\\&\geqslant\int_{G'\cup(G\setminus G_0)}x_n(t)v_n(t)dt\to 1 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

因为 $M(u)\in\nabla_2$，即 $N(v)\in\Delta_2$，从而由定理 1.34 $\rho_N(u_n\chi_{G'\cup(G\setminus G_0)})\to 1$ $(n\to\infty)$，或者等价地，$\rho_N(v_n\chi_{G_0\setminus G'})\to 0$ $(n\to\infty)$，再由定理1.34，便得到

$$\|v_n\chi_{G_0\setminus G'}\|_{(N)}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_G x_0(t)v_n(t)dt&=\int_{G_0\setminus G'}x_0(t)v_n(t)dt+\int_{G'}x_0(t)v_n(t)dt\\&\leqslant\|x_0\|_M\|v_n\chi_{G_0\setminus G'}\|_{(N)}+\|x_0\chi_{G'}\|_M\|v_n\|_{(N)}\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，由 (3.29) 式，有

$$1\leqslant\|x_0\chi_{G'}\|_M<1-\beta$$

然而$\beta>0$，此为矛盾。

定理3.11 L_M^* 非$l_n^{(1)}$ $(n\geqslant 2)$

证 由定理 3.8，L_M^* 为非方的，从而由定理 0.31 L_M^* 为非$l_2^{(1)}$的，由此易知对一切$n\geqslant 2$，L_M^* 为非$l_n^{(1)}$的。

§5 平坦性与RN性质

本节将讨论 $L_{(M)}^*$ 与L_M^*的平坦性以及与平坦性有关的 RN 性、几何参数GirthU (X)等。

引理 3.6 空间l^∞为平坦的。

证 只须证明：存在映射g^s:[0, 2]→l^∞ 满足 (1)$\|g^s\|_\infty=1$ $s\in[0,2]$； (2) $g^0=-g^2$； (3) 对任意$0\leqslant s_1<s_2\leqslant 2$，$\|g^{s_2}-g^{s_1}\|_\infty=|s_2-s_1|$。

将[-1, 1) 中有理数全体排成一列$r_1=-1$，$r_2,r_3,\cdots$,定义[0,2]上的函数$a_n(s)$

$$a_n(s)=\begin{cases} r_n+s & 0\leqslant s\leqslant 1-r_n \\ 2-r_n-s & 1-r_n\leqslant s\leqslant 2 \end{cases} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

令

$$g^s=\{a_n(s)\}_{n=1}^\infty \qquad 0\leqslant s\leqslant 2$$

任意固定$s\in[0,2]$，显然$\|g^s\|_\infty=\sup|a_n(s)|\leqslant 1$．任给$\varepsilon>0$，由于$1-s\in[-1,1]$，取$r_{n_0}$使$1-s-\varepsilon<r_{n_0}\leqslant 1-s$，于是$x_{n_0}(s)=r_{n_0}+s>1-\varepsilon$，因此$\|g^s\|_\infty>1-\varepsilon$，于是

$$\|g^s\|_\infty=1$$

由定义明显得出

$$g^0=\{a_n(0)\}_{n=1}^\infty=\{-a_n(2)\}_{n=1}^\infty=-g^2$$

任取 $0\leqslant s_1<s_2\leqslant 2$，易知$\|g^{s_2}-g^{s_1}\|_\infty\leqslant|s_2-s_1|$下面证其等号必成立。

当$0<s_1<s_2\leqslant 2$时，取 r_{n_1}，使$0<1-r_{n_1}<s_1$，于是 $\|g^{s_2}-g^{s_1}\|_\infty\geqslant|a_{n_1}(s_2)-a_{n_1}(s_1)|=|s_2-s_1|$，这样一来，我们有$\|g^{s_2}-s_1\|_\infty=|s_2-s_1|$。

当$0=s_1<s_2\leqslant 2$时，对任意的$\varepsilon>0$，取 r_{n_2} 使 $1-r_{n_2}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, s_2\right\}$，故

$$s_2=|s_2-s_1|\geqslant\|g^{s_2}-g^{s_1}\|_\infty\geqslant|a_{n_2}(s_2)-a_{n_2}(0)|$$
$$=|2(1-r_{n_2})-s_2|>s_2-\varepsilon$$

由此可知$\|g^{s_2}-g^{s_1}\|_\infty=|s_2-s_1|$.

定理3.12 下述命题等价

(1) $L^*_{(M)}$非平坦；

(2) $M(u)\in\Delta_2$；

(3) $L^*_{(M)}$具有RN性质.

证 (1) ⇒ (2)

如（2）不真，由定理3.1，空间 l^∞ 可等距嵌入$L^*_{(M)}$，再由引理3.6，即知$L^*_{(M)}$为平坦的，与（1）相矛盾.

(2) ⇒ (3)

因为$L^*_{(M)}$为E_N的共轭空间，由（2）又知$L^*_{(M)}$是可分的，于是由定理0.34，即知$L^*_{(M)}$具有RN性质.

(3) ⇒ (1)

若（1）不真，即$L^*_{(M)}$平坦，由定理0.40，便知$L^*_{(M)}$不具有RN性质，这与（3）相矛盾.

推论3.2 L^*_M具有RN性质的充分必要条件是 $M(u)\in\Delta_2$.

证 由$\|\cdot\|_M$与$\|\cdot\|_{(M)}$的等价性立即可得.

下面的定理具有深刻意义，它表明：当$M(u)\overline{\in}\Delta_2$时，不但$L^*_{(M)}$与$L^*_M$不具有RN性质，而且其子空间$E_{(M)}$与$E_M$亦然，再顾及到定理0.34，即知空间$E_{(M)}$与$E_M$不是任何 Banach 空间的共轭空间.

定理3.13 若$M(u)\overline{\in}\Delta_2$，则$E_{(M)}$不具有RN性质.

证 由定理0.33只须证$E_{(M)}$中存在有界的不可凹集.

因为 $M(u)\overline{\in}\Delta_2$，故有 $u_n\uparrow+\infty$ $(n\to\infty)$ 与G 的两两不交子集列$\{G_n\}$满足

$$M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]>2^nM(u_n)$$

$$\text{mes}\,G_n=\frac{1}{2^nM(u_n)}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

由于

$$\rho_M(2u_n\chi_{G_n})\geqslant\rho_M\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\chi_{G_n}\right)$$

$$>2^nM(u_n)\text{mes}\;G_n$$

$$=1\qquad(n=1,2,\cdots)$$

从而由$\|\cdot\|_{(M)}$的定义，有

$$\|u_n\chi_{G_n}\|_{(M)}\geqslant\frac{1}{2}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

令

$$X_0=\left\{\sum_{i=n}^{m}\varepsilon_iu_i\chi_{G_i}(t):1\leqslant n\leqslant m<\infty,|\varepsilon_i|\leqslant1,i=1,2,\cdots\right\}$$

则$K=\overline{X_0}$为有界集．事实上，$x\in K=\overline{X_0}$，易知x可唯一表示为

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_iu_i\chi_{G_i}(t)\qquad(|\varepsilon_i|\leqslant1,\ i=1,2,\cdots)\qquad(3.31)$$

所以 $\rho_M(x)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M(u_i)\text{mes}\;G_i=1$，于是$\|x\|_{(M)}\leqslant1$．

下面证K为不可凹集．

由 K 的定义，可知（3.31）式中，$\varepsilon_i\to0$ $(i\to\infty)$．取i_0充分大，使得 $|\varepsilon_{i_0}|<\frac{1}{2}$．无碍一般性，设 $\varepsilon_{i_0}\geqslant0$，

再令

$$y(t)=\sum_{i\neq i_0}\varepsilon_iu_i\chi_{G_i}(t)+u_{i_0}\chi_{G_{i_0}}(t)$$

$$z(t)=\sum_{i\neq i_0}\varepsilon_iu_i\chi_{G_i}(t)-(1-2\varepsilon_{i_0})u_{i_0}\chi_{G_{i_0}}(t)$$

则 $x=\frac{1}{2}(y+z)$ 而且

$$\|x-y\|_{(M)}=\|x-z\|_{(M)}=(1-\varepsilon_{i_0})\|u_{i_0}\chi_{G_{i_0}}\|_{(M)}$$
$$\geqslant(1-\varepsilon_{i_0})/2$$
$$>\frac{1}{4}$$

于是 $y\in K\backslash B_{\frac{1}{4}}(1)$, $z\in K\backslash B_{\frac{1}{4}}(x)$, 从而

$$x\in\overline{\text{cov}}\,K\backslash B_{\frac{1}{4}}(x)$$

此处 $B_{\frac{1}{4}}(x)=\left\{y\in L_{(M)}^{*}:\|x-y\|_{(M)}\leqslant\frac{1}{4}\right\}$, 由定义知 K 为不可凹集.

定理3.14 L_M^* 非平坦.

证 由定理 3.8, L_M^* 局部一致非方, 再由 定理 0.41 立即可得.

定理3.15 有

(1) $\text{GirthU}(L_{(M)}^{*})>4\Longleftrightarrow L_{(M)}^{*}$ 自反;

(2) $\text{GirthU}(L_{(M)}^{*})=4$ 不可达 $\Longleftrightarrow L_{(M)}^{*}$ 可分、非自反;

(3) $\text{GirthU}(L_{(M)}^{*})=4$ 可达 $\Longleftrightarrow L_{(M)}^{*}$ 不可分

证 (1) 由定理0.38, $\text{GirthU}(L_{(M)}^{*})>4$ 等价于 $L_{(M)}^{*}$ 超自反, 再由定理 3.6, 这又等价于 $L_{(M)}^{*}$ 自反.

(2) 由 (1) 并应用定理 3.12, 立即可得.

(3) 此即定理3.12.

定理3.16 下列命题成立

(1) $\text{GirthU}(L_M^*)>4\Longleftrightarrow L_M^*$ 自反;

(2) $\text{GirthU}(L_M^*)=4$、不可达 $\Longleftrightarrow L_M^*$ 非自反.

证 (1) 与上同理.

(2) 由 (1) 与定理3.12立即可得.

注 做为本章的结尾，我们不加证明地列出关于$L_{(M)}^{*}$一致非$l_n^{(1)}$性的另一种判据.

1966年，K.Sundaresan[10]首先研究$L_{(M)}^{*}$的一致非$l_2^{(1)}$性，证得定理3.17

定理 3.17 $L_{(M)}^{*}$一致非$l_2^{(1)}$的充分必要条件为 (1) $M(u)\in\Delta_2$； (2) 存在θ、δ，$0<\theta$，$\delta<1$，对满足

$$M(u_1)+M(u_2)\geqslant\frac{2\delta}{\mathrm{mes}G}\text{的}u_1\text{、}u_2\text{，恒有}$$

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+M\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right)\leqslant\theta(M(u_1)+M(u_2))$$

1985年，王廷辅[11]，H.Hudzik[13]各自独立地讨论了$L_{(M)}^{*}$的一致非$l_n^{(1)}(n\geqslant2)$性，得到定理3.18

定理 3.18 $L_{(M)}^{*}$一致非$l_n^{(1)}(n\geqslant2)$当且仅当(1)$M(u)\in\Delta_2$；(2)存在θ、δ，$0<\delta$，$\theta<1$，对一切满足$\sum_{k=1}^{n}M(u_k)\geqslant\frac{n\delta}{\mathrm{mes}G}$的$u_1$，$u_2$，…，$u_n$恒有

$$\sum_{\varepsilon}M\left(\frac{u_1+\varepsilon_2u_2+\cdots+\varepsilon_nu_n}{n}\right)\leqslant\theta\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}M(u_k)$$

这里求和$\sum_{\varepsilon}$是对$\varepsilon_j=1$或-1 ($j=2,3,\cdots,n$) 的一切可能组合进行的.

1985年，R.Grzas'lewicz，H.Hudzik与W. Orlicz[14]又将上述结果推广到更广的Orlicz空间.

附记 本章内容基本上取材于参考文献[1—9]，定理3.1、3.2属于B.Turett[1]；定理3.3取自王玉文[2]；定理3.4、3.7参看陈述涛[3]，其中定理3.4中(3)$\Leftrightarrow$(4)首见于M.Danker与R.kombrink的[9]；定理3.5、3.8、3.14选自王玉文[4]和王玉文、陈述涛[5]；定理3.9属于H.Hudzik[6]；定理3.10、3.11参阅陈述涛、王玉文[7]；定理3.12中(1)$\Leftrightarrow$(2)由A.J.Pach等[8]首先

得到；定理3.13则属于陈述涛未发表的论文。

参 考 文 献

[1] B.Turett, Rotundity of Orlicz spaces,Indag. Math.,38(1976),462—469.

[2] 王玉文，Orlicz 空间的弱序列完备性，东北数学，1(1985),no.2,241—246.

[3] 陈述涛,Orlicz 空间的非方性质,数学年刊,6A(1985) 619—624.

[4] 王玉文，Uniform Non-squareness and Flatness in Orlicz spaces,数学研究与评论，(1984) no.4, 94.

[5] 王玉文、陈述涛，Non-Squareness , B-convexity and Flatness in Orlicz spaces with Orlicz norm, Comment. Math. (待发表).

[6] H. Hudzik,Locally uniformly non-$l_n^{(1)}$ Orlicz spaces (待发表).

[7] 陈述涛、王玉文 ,On definition for nonsquareness of normed spaces (待发表).

[8] A.J.Pach,M.A.Smith and B. Turett, Flat Orlicz spaces,Proc.Amer.Math.Soc.,81(1981),528—530.

[9] M. Denker, R. Kombrink, On B-convex Orlicz spaces, Lect.Notes Math.,79(1979),87-95.

[10] K. Sundaresan, Uniformly non—square Orlicz spaces, Nieuw.Arch.Wisk.,14(1966),31—39.

[11] 王廷辅，Orlicz 空间一致非 $l_n^{(1)}$ 的条件,科学探索，(1985),no.1,125—126.

[12] J. J. Schäffer, «Geometry of Spheres in Normed Spaces», Marcel Dakker,inc. New York and Basel (1976).

[13] H. Hudzik, Uniformly non-$l_n^{(1)}$ Orlicz spaces

with Luxemburg norm, Studia Math., 81 (1985), 41—54.

[14] R.Grzas'lewicz, H.Hudzik and W. Orlicz, Uniform non-$l_n^{(1)}$ property in some normed spaces (待发表).

第四章 Orlicz 序列空间

五十年代末 J.Gribanov 等人开始考察 Orlicz 序列空间，从而形成 Orlicz 函数空间与序列空间并行发展的局面. 序列，可以看成是定义于纯原子无限测度空间上的函数，与通常意义下的函数——定义于无原子有限测度空间上的函数有所区别. 我们可以看到，两类空间的几何学有许多平行命题，其结论和证明方法都很相似；也有一些结论虽相似，但证明中使用了有关序列的特殊技巧；更有一些足以表现两类空间质的差异的，耐人寻味的命题，本章只讨论后两种内容.

仍以 $M(u), N(v)$ 记一对互余N函数. $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, …表实数序列. 称 $\rho_M(x)=\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i)$ 是 x 关于 M 的模. 线性集

$$l_M=\left\{x:\ \exists a>0,\ 使\ \rho_M\left(\frac{x}{a}\right)<\infty\right\}$$

关于范数

$$\|x\|_{(M)}=\inf\left\{a>0:\rho_M\left(\frac{x}{a}\right)\leqslant 1\right\}$$

或范数

$$\|x\|_M=\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i:\rho_N(y)\leqslant 1\right\}$$

成为 Banach 空间，称为 Orlicz 序列空间，两个范数有等价关系：$\|x\|_{(M)}\leqslant\|x\|_M\leqslant 2\|x\|_{(M)}$ $(x\in l_M)$.

记序列 $\tau_n=(\overbrace{11\cdots1}^{n}00\cdots)$，则

$$\|\tau_n\|_M=nN^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),\ \|\tau_n\|_{(M)}=1/M^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\ (n=1,2,\cdots)\qquad(4.1)$$

以P_n记l_M到l_M的映射：$P_n(x)=(\overbrace{00\cdots0}^{n}x_{n+1},x_{n+2},\cdots)$，则集合

$$h_M=\{x\in l_M: \lim_{n\to\infty}\|P_nx\|_{(M)}=0\}$$

是l_M的线性子空间，而且

$$x\in h_M\Leftrightarrow\forall a>0,\rho_M\left(\frac{x}{a}\right)<\infty \tag{4.2}$$

若存在$C>0,u_0>0$，使当$|u|\leqslant u_0$时$M(2u)\leqslant CM(u)$称$M(u)$关于较小的u满足Δ_2条件，本章简记此事为"$M\in\Delta_2$"，容易推出若$M\in\Delta_2$，则对任何$u_0>0$和$l>1$，总有$C>0$，使当$0\leqslant u\leqslant u_0$时$M(lu)\leqslant CM(u)$。

本章只拟讨论赋 Luxemburg 范数的l_M，并简记为l_M，同时分别简记$\|\cdot\|_{(M)},U(l_M),S(l_M)$为$\|\cdot\|$，$U_M$，$S_M$。

§1 基与同构子空间

本书前三章讨论函数空间几何时未涉及空间的基，这是因为〔1〕Ch2§8已对此详加讨论。那里的主要结果有三：E_M有 Schauder 基，如Harr系；若L_M*自反，Harr 系是无条件基；若L_M* 可分而不自反，L_M* 有基而没有无条件基。

记$e_i=(00\cdots0\overset{i}{1}00\cdots)\quad(i=1,2,\cdots)$，称$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$是单位向量系。易知$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$是任何$h_M$的基、无条件基和对称基。本节主旨是回答，在等价意义下单位向量基是否是h_M的唯一的向量基。与基理论密切相关的有空间同构理论，即回答l_M有无子空间与某$l^p(P\geqslant1)$同构？更一般地，l_M有无子空间与另一个l_{M_1}同构？这是本节的另一主旨。

首先给出预备性命题：

引理 4.1 以下几种说法等价

(1) $M\in\Delta_2$；

(2) $l_M=h_M$；

(3) 单位向量系是l_M的有界完备的对称基；

(4) l_M可分；

(5) l_M 不含与 l^∞ 同构的子空间。

证 (1)⇒(2)，显然。

(2)⇒(3)。已知 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 是 $l_M=h_M$ 的对称基，如果 $\sup\limits_n\|\sum\limits_{i=1}^n a_ie_i\|\leqslant 1$，则 $\sup\limits_n\sum\limits_{i=1}^n M(a_i)\leqslant 1$，进而 $\sum\limits_{i=1}^\infty M(a_i)\leqslant 1$。这表明序列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty\in l_M$，即 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 是 l_M 的有界完备基。

(3)⇒(4)⇒(5)，显然。

(5)⇒(1)。若 $M\overline{\in}\Delta_2$，则有 t_n，$M(2t_n)>2^{n+1}M(t_n)$，$M(t_n)\leqslant 1/2^n(n=1,2,\cdots)$。取正整数 k_n，$\frac{1}{2^{n+1}}<k_nM(t_n)\leqslant\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$。则 $\sum\limits_{n=1}^\infty k_nM(t_n)\leqslant 1$ 且 $k_nM(2t_n)>1$ $(n=1,2,\cdots)$。于是对任何数列 $\{a_i\}_{i=1}^\infty$

$$\frac{1}{2}\sup_n|a_n|\leqslant\|(\overbrace{a_1t_1,a_1t_1,\cdots,a_1t_1}^{k_1},\overbrace{a_2t_2,\cdots,a_2t_2}^{k_2},\overbrace{a_3t_3,\cdots,a_3t_3}^{k_3},\cdots)\|\leqslant\sup_n|a_n|.$$

这表明由 $(\overbrace{0\ 0\cdots0\ 0\cdots0}^{k_1+\cdots+k_{n-1}}\overbrace{t_n\cdots t_n}^{k_n}00\cdots)$ $(n=1,2\cdots)$ 张成的l_M的子空间与l^∞同构。

引理 4.2 以下说法等价

(1) $l_{M_1}=l_{M_2}$且恒等映射为同构映射；

(2) h_{M_1}和h_{M_2}的单位向量基等价；

(3) M_1,M_2在 0 点近旁等价，即存在$K>0,k>0$和$t_0>0$，当$0\leqslant t\leqslant t_0$时 $\frac{1}{K}M_2\left(\frac{t}{k}\right)\leqslant M_1(t)\leqslant KM_2(kt)$。

证 (1)⇒(2)，(3)⇒(1)，显然，现证 (2)⇒(3)。

若 (3) 不成立，存在 t_n，$M_1(t_n)<1/2^n$，$M_1(t_n)>2^nM_2(nt_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，取K_n，$1/2^{n+1}<K_nM_1(t_n)\leqslant 1/2^n$ $(n=1,2,\cdots)$。

记 $x = (\overbrace{t_1 \cdots t_1}^{2k_1}, \cdots, \overbrace{t_n \cdots t_n}^{2^n k_n}, \cdots)$，则对任何自然数$m$

$$\rho_{M_2}(mx) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n k_n M_2(mt_n) \leqslant \sum_{n=1}^{m} 2^n k_n M_2(mt_n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^n k_n M_2(nt_n)$$

而

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^n k_n M_2(nt_n) < \sum_{n=m+1}^{\infty} k_n M_1(t_n) \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

可见 $\rho_{M_2}(mx) < \infty$，即$x \in h_{M_2}$．但是

$$\rho_{M_1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n k_n M_1(t_n) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

即 $x \overline{\in} h_{M_1}$，与（2）矛盾．

现在引进四类函数集：

$$E_{M,\Lambda} = \left\{ \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)} : 0 < \lambda < \Lambda \right\}, \quad E_M = \bigcap_{\Lambda > 0} E_{M,\Lambda}$$

$$C_{M,\Lambda} = \overline{\text{conv}} E_{M,\Lambda}, \qquad C_M = \bigcap_{\Lambda > 0} C_{M,\Lambda}$$

这里的闭包取自 $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 拓扑，我们先来证明以上诸集都是 $C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 中的列紧集．

事实上，对固定的$\lambda > 0$ 和 $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{M(\lambda t_1)}{M(\lambda)} - \frac{M(\lambda t_2)}{M(\lambda)} \right| \leqslant \frac{|t_1 - t_2|}{M(\lambda)} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} \left| \frac{dM(\lambda t)}{dt} \right|$$

$$= \frac{|t_1 - t_2|}{M(\lambda)} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}} |\lambda p(\lambda t)|$$

$$\leqslant |t_1 - t_2| \frac{\lambda p\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{M(\lambda)} \leqslant 2|t_1 - t_2|$$

另外$\frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)}\leqslant 1\ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right)$. 这表明$\left\{\frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)}:0<\lambda<\Lambda\right\}$

是$C\left[0,\frac{1}{2}\right]$中等度连续且一致有界集，故其闭包、凸闭包都是

列紧集. 列紧集族的交也是列紧集.

若$M\in\Delta_2$，则$\frac{\lambda p(\lambda)}{M(\lambda)}\leqslant a<\infty(0<\lambda\leqslant\Lambda)$. 同上推理可证

以上诸集皆为$C[0,1]$中列紧集.

定理 4.1 设$M,M_1\in\Delta_2$，l_{M_1}与l_M的一个子空间同构的充分必要条件是M_1等价于$C_{M,1}$中一元.

证 必要性 无碍于一般性设$M(1)=1$. 又设$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$分别是l_{M_1}和l_M的由单位向量系组成的对称基. T是从l_{M_1}到l_M内的同构映射，依熟知的程序，选出$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$的子列$\{u_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$，正数列$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$和递增自然数列$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，使

$v_n=\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}}\lambda_i e_i$是$l_M$的单位向量$(n=1,2,\cdots)$且

$$\left\|v_n-\frac{Tu_{i_n}}{\|Tu_{i_n}\|}\right\|\leqslant\frac{1}{2^n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

设$g_n(t)=\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}}M(\lambda_i t)\quad(n=1,2,\cdots)$，由$1=\|v_n\|$

$=\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}}M(\lambda_i)$可知$g_n\in C_{M,1}\ (n=1,2,\cdots)$. 由$C_{M,1}$紧、$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$有子列$\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，$g_{n_k}\to g\in C_{M,1}\quad(k\to\infty)$. 于是$\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_{i_{n_k}}$在$l_{M_1}$中收敛$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}a_k v_{n_k}$在$l_M$中收敛$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}g_{n_k}(a_k)$

收敛$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}g(a_k)$收敛. 由引理4.2，$\{u_{i_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$的线性闭包与$l_g$同构，但$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$是$l_{M_1}$的对称基，更是子列不变基，即$\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$同$\{u_{i_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$等价，这表明$l_{M_1}$与$l_g$同构，再据引理4.2，$M_1$

等价于g.

充分性　设 $M_1 \in C_{M,1}$. 注意到 $C_{M,1}$ 的端点皆含于 $E_{M,1}$, 映射 $\lambda \to \dfrac{M(\lambda t)}{M(\lambda)}$ 是从 $I_0 = (0,1]$ 到 $E_{M,1}$ 的连续映射，可一意地延拓为 βI_0 (βI_0 是 I_0 的Stone-Čech 紧扩张) 到 $E_{M,1}$ 上的映射 $\omega \to M_\omega$. 由 Krein-Milman 表现定理，存在 βI_0 上概率测度 μ，使

$$M_1(t) = \int_{\beta I_0} M_\omega(t) d\mu(\omega) \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$$

对每一个 n，令 $\Lambda_n = \begin{cases} 1 & , \mu(I_0) > 0 \\ 1/2^{n+1}, & \mu(I_0) = 0 \end{cases}$，再选择 βI_0 上概率测度 μ_n，μ_n 集中于区间 $(0, \Lambda_n)$，而且

$$\left| M_1(t) - \int_0^{\Lambda_n} \frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)} d\mu_n(\lambda) \right| < 1/2^{n+1}$$

$$\left(n = 1, 2, \cdots, 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

取定 τ，$0 < \tau < 1$，置 $a_{j,n} = \displaystyle\int_{\tau^j \Lambda_n}^{\tau^{j-1}\Lambda_n} \frac{1}{M(\lambda)} d\mu_n(\lambda)$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n} M(\tau^j \Lambda_n t) - 1/2^{n+1} \leqslant M_1(t) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n} M(\tau^{j-1} \Lambda_n t) + 1/2^{n+1}$$

更有

$$\sum_{j=1}^{\infty} [a_{jn}] M(\tau^j \Lambda_n t) - 1/2^{n+1} \leqslant M_1(t) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} [a_{jn}] M(\tau^{j-1} \Lambda_n t)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} M(\tau^{j-1} \Lambda_n t) + 1/2^{n+1}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} [a_{jn}] M(\tau^{j-1} \Lambda_n t) + \frac{M(t)\Lambda_n}{1-\tau} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\left(n = 1, 2, \cdots; 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

选 k_n，使 $\sum_{j=k_n+1}^{\infty}[a_{jn}]M\left(\tau^{j-1}\frac{\Lambda_n}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}(n=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{j=1}^{k_n}[a_{jn}]M(\tau^j\Lambda_n t)-1/2^{n+1}\leqslant M_1(t)\leqslant\sum_{j=1}^{k_n}[a_{jn}]M(\tau^{j-1}\Lambda_n t)$$

$$+\frac{M(t)}{1-\tau}+1/2^n\qquad(n=1,2,\cdots)$$

当 $\mu(I_0)>0$ 时，易知有 γ，λ_0，$\gamma<1$，$\lambda_0>0$，使 $M_1(t)\geqslant\gamma M(\lambda_0 t)$．于是又有

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k_n}[a_{jn}]M(\tau^j\Lambda_n t)+\gamma M(\lambda_0 t)-1/2^n\right)\leqslant M_1(t)\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{k}[a_{jn}]M(\tau^{j-1}\Lambda_n t)+\frac{M(t)}{1-\tau}+1/2^n\quad(n=1,2,\cdots)\quad(4.3)$$

将全体自然数分成一列互不相交的子集 $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$，每一 η_n 含有互不相交的一列子集 $\{\eta_{jn}\}_{j=0}^{\infty}$，其中 η_{jn} 含 $[a_{jn}]$ 个自然数 $(j=1,2,\cdots)$，而 η_{0n} 只含一个自然数 m_n．记

$$u_n=\Lambda_n\left\{\sum_{j=1}^{k_n}\tau^j\sum_{i\in\eta_{jn}}e_i+e_{m_n}\right\}\quad(n=1,2,\cdots)$$

则 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 组成 l_M 中块基列，由（4.3），$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的线性闭包——l_M 的一个子空间与 l_{M_1} 同构，定理证毕．

判断空间 l^p $(p\geqslant1)$ 是否与 l_M 的一个子空间同构，自然可以使用定理 4.1．下面给出一个更简明的判据．记

$$\alpha_M=\sup\left\{q:\sup_{0<\lambda;\,t<1}\frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)t^q}<\infty\right\}$$

$$\beta_M=\inf\left\{q:\inf_{0<\lambda;\,t<1}\frac{M(\lambda t)}{M(\lambda)t^q}>0\right\}$$

易知$1\leqslant\alpha_M\leqslant\beta_M$ 且$\beta_M<\infty\Leftrightarrow M\in\Delta_2$．

定理 4.2 设$M\in\Delta_2$，以下说法等价

(1) $t^p\in C_M$；

(2) t^p 等价于 $C_{M,1}$ 中一个函数；

(3) l^p 同构于 l_M 的一个子空间；

(4) $p\in[\alpha_M,\beta_M]$.

证 (1)⇒(2)，显然．(2)⇔(3)，即定理 4.1．

(2)⇒(4)．若 $p<\alpha_M$，则有 $r, p<r<\alpha_M$．由 α_M 定义，存在 $C>0$ 使 $M(\lambda t)<CM(\lambda)t^r$ $(0<\lambda, t\leqslant 1)$．从而对一切 $g\in C_{M,1}$，有$g(t)\leqslant Ct^r(0\leqslant t\leqslant 1)$．这表明 t^p 真大于 $C_{M,1}$ 中任何函数．同样$p>\beta_M$ 也不可能．

(4)⇒(1)．先设 $\alpha_M=\beta_M$．对于每一个 τ，$0<\tau<1$，规定映射 T_τ：$T_\tau\phi(t)=\dfrac{\phi(\tau t)}{\phi(\tau)}$．容易验证 T_τ 是从$C_{M,A}$ 到$C_{M,A\tau}$ 上的连续映射 $(0<A\leqslant 1)$．因 $C_{M,A}$ 在 $C[0,1]$ 中紧，由 Schauder-Tychonoff 不动点定理，T_τ 有不动点 $\phi_\tau\in C_M$，即 $\phi_\tau(\tau t)=\phi_\tau(\tau)\phi_\tau(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$．

$$\text{令}q_\tau=\log\phi_\tau(\tau)/\log\tau,\ \text{则}\phi_\tau(\tau)=\tau^{q_\tau},\ \phi_\tau(\tau^n)=(\tau^n)^{q_\tau}$$
$$(n=1,2,\cdots).$$

又据 $\phi_\tau\in C_M$，$\dfrac{\phi_\tau(\tau)}{\tau}\leqslant\dfrac{\phi_\tau(1)}{1}=1$，得 $\phi_\tau(\tau)\leqslant\tau$，从而 $q_\tau\geqslant 1$．

鉴于 C_M 中函数的导数的有界性，存在 $A>0$，
$$|\phi_\tau(t)-\phi_\tau(s)|\leqslant A|t-s| \quad (t,s\in[0,1])$$
这样一来，对每一个 $t\in(0,1]$，可取 $n, \tau^n<t\leqslant\tau^{n-1}$．于是对任何 t，$0<t\leqslant 1$ 有
$$|\phi_\tau(t)-t^{q_\tau}|\leqslant|\phi_\tau(t)-\phi_\tau(\tau^n)|+|(\tau^n)^{q_\tau}-t^{q_\tau}|$$
$$\leqslant A|t-\tau^n|+(\tau^{n-1})^{q_\tau}-(\tau^n)^{q_\tau}\leqslant 2A(1-\tau)$$
令 $\tau\to 1$，因 C_M 紧，$\{\phi_\tau\}$ 有子列一致收敛于某个 t^q．这里 $q\geqslant 1$，$t^q\in C_M$．由于 $C_M\subset C_{M,1}$，由已证之 (2) ⇒ (4) 知 $q\in[\alpha_M, \beta_M]$，即 $q=\alpha_M=\beta_M$．

现在设 $\alpha_M<\beta_M$，$p\in(\alpha_M,\beta_M)$．由 α_M，β_M 定义，存在 $u_n, v_n, w_n\downarrow 0$，$0<u_n<v_n<w_n\leqslant 1$，$u_n/v_n\to 0$ 且
$$n\frac{M(u_n)}{u_n^{\,p}}<\frac{M(u_n/2)}{(v_n/2)^p},\quad n\frac{M(w_n)}{w^p_n}<\frac{M(v_n/2)}{(v_n/2)^P}$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{4.4}$$

置

$$M_n(t)=A_n^{-1}\int_{u_n/w_n}^{1} M(tsw_n)s^{-(P+1)}ds$$

此处$A_n=\int_{u_n/w_n}^{1} M(sw_n)s^{-(P+1)}ds$。易见 $M_n\in C_{M,w_n}$

$$(n=1,2,\cdots)$$

作代换 $y=ts$ 得

$$M_n(t)=A_n^{-1}t^P\int_{u_nt/w_n}^{t} M(yw_n)y^{-(P+1)}dy$$

$$=A_n^{-1}t^P\left(\int_{u_n/w_n}^{1}+\int_{u_nt/w_n}^{u_n/w_n}-\int_t^1\right)M(yw_n)y^{-(P+1)}dy \tag{4.5}$$

注意到$v_n/w_n\Big/u_n/w_n=v_n/u_n\to\infty(n\to\infty)$，取$n$充分大使

$$A_n\geqslant\int_{v_n/2w_n}^{v_n/w_n}M(sw_n)s^{-(P+1)}ds\geqslant\frac{1}{2}M\left(\frac{v_n}{2}\right)\left(\frac{v_n}{w_n}\right)^{-P} \tag{4.6}$$

于是由 (4.6)、(4.4) 式得

$$A_n^{-1}t^P\int_{u_n/w_n}^{1} M(yw_n)y^{-(P+1)}dy=t^P$$

$$A_n^{-1}t^P\int_{u_nt/w_n}^{u_n/w_n} M(yw_n)y^{-(P+1)}dy$$

$$\leqslant\frac{2}{M(v_n/2)}\left(\frac{v_n}{w_n}\right)^P M(u_n)\left(\frac{u_n}{w_n}\right)^{-P}\leqslant\frac{2^{P+1}}{n}$$

$$A_n^{-1}t^P\int_t^1 M(yw_n)\ y^{-(P+1)}dy$$

$$\leqslant\frac{2}{M(v_n/2)}\left(\frac{v_n}{w_n}\right)^P M(w_n)\leqslant\frac{2^{P+1}}{n}$$

这表明 $M_n(t)\to t^P(n\to\infty)$于$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$一致成立。注意到$w_n\to 0$，可见$t^P\in C_M$。

推论 对任何 l_M，有 $p\geq1$，使 l^P 与 l_M 的一个子空间同构。

证 若 $M\notin\Delta_2$，由引理 4.1，l_M 包含一个与 l^∞ 同构的子空间，从而可包含与任何可分空间同构的子空间。若$M\in\Delta_2$，则从 $[\alpha_M,\beta_M]$ 中随意取 p 即可。

这一推论局部地回答了著名猜想"每一个无穷维 Banach 空间都包含一个与 c_0 或某 $l^P(p\geq1)$ 同构的子空间"。

引理 4.1 已经阐明$M\in\Delta_2$时，单位向量基是 l_M的对称基，以下将讨论对称基的唯一性，先给出一个充分判据。

定理 4.3 设 $M\in\Delta_2$。C_M 中不含与M等价的函数，则在等价意义下$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 是 l_M 的唯一对称基。

证 设 $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ 是 l_M 的另一对称基。由于 $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ 与它的每一个无穷子列等价以及每一 f_n' 均可表为 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ 的级数，按熟知程序可构造规范块基，即存在数列 $\{t_i\}_{i=1}^\infty$，自然数列 $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ 满足

$$f_n''=\sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}}t_ie_i\,,\quad\sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}}M(t_i)=\|f_n''\|=1\quad(n=1,2,\cdots)$$

使 $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ 与 $\{f_n''\}_{n=1}^\infty$ 等价。注意到 $M\in\Delta_2$，如同定理4.1的证明，$g_n(x)=\sum\limits_{i=q_n+1}^{q_{n+1}}M(t_ix)\in C_{M,1}$。从而 $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ 有子列 $\{g_{n_k}\}_{k=1}^\infty$，$g_{n_k}(x)\to g(x)\in C_{M,1}$ $(k\to\infty)$，关于 x 一致成立，由此推出 $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ 等价于 l_g 的单位向量基 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$。

以 g 替换M，以 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 替换 $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$，重复上述推理，可选出 $\sum\limits_{j=r_n+1}^{r_{n+1}}s_jf_j'$，$\sum\limits_{j=r_n+1}^{r_{n+1}}g(s_j)=1$ $(n=1,2,\cdots)$，与$\{e_n\}_{n=1}^\infty$等价。$\sum\limits_{j=r_n+1}^{r_{n+1}}g(s_jt)$ $(n=1,2,\cdots)$ 有子列一致收敛于 M_1。从而 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 等价于 l_{M_1} 的单位向量基。由引理4.2，M与M_1等价。综合两个过程可知，$M_1(t)$ 是如下函数列在 $[0,1]$ 上的一致极限，即

$$M_1(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}}\sum_{j=r_{m_n+1}}^{r_{m_{n+1}}}\frac{M(t_is_jt)}{M(t_is_j)}M(t_is_j)$$

这里 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}}\cdot\sum_{j=r_{m_n+1}}^{r_{m_{n+1}}}M(t_is_j)=1$.

即$M_1(t)$可用$\dfrac{M(t_is_jt)}{M(t_is_j)}$的凸组合一致逼近。若$\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$有一个趋于零，则$M_1\in C_M$，与假设相矛盾，故存在$a>0$，$\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，$\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的子列$\{t_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$，$\{s_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使 $|t_{i_k}|>a$，$|s_{j_k}|>a(k=1,2,\cdots)$。此时易见$M$与$g$等价，即$\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价，定理证毕。

若定理4.3条件不满足，即使 l_M 自反，也可能有两个或更多的不等价的对称基。为举反例先设立引理 4.3

引理 4.3 设$H(x)$，$K(x)$ 是定义在 $[t,1]$ $(0<t<1)$ 上的连续、非降、凸函数且满足

(1) $H(1)=K(1)=1$，$0<H(t),K(t)<1$；

(2) 存在$D>C>1$，使 $H'(1)=K'(1)=C$和$C\leqslant\dfrac{xH'(x)}{H(x)}$，$\dfrac{xK'(x)}{K(x)}\leqslant D(t\leqslant x\leqslant 1)$ （此时蕴涵H和K满足 Δ_2，∇_2 条件）。

则函数$\widetilde{H}(x)=\begin{cases}H(x), & t\leqslant x\leqslant 1\\ H(x)K\left(\dfrac{x}{t}\right), & t^2\leqslant x<t\end{cases}$ 是$[t^2,1]$上连续、凸、非降函数且 $C\leqslant\dfrac{x\widetilde{H}'(x)}{\widetilde{H}(x)}\leqslant D$。

证 $\widetilde{H}$是H的连续非降延拓，这是显然的。当 $t^2<x<t$，

$\widetilde{H}'(x)=\dfrac{H(t)K'(x/t)}{t}$，因而 $\widetilde{H}'(t-0)=\dfrac{H(t)K'(1)}{t}$

$= C\frac{H(t)}{t} \leqslant \frac{H(t)}{t} \cdot \frac{tH'(t)}{H(t)} = \widetilde{H}'(t)$. 这表明$\widetilde{H}(t)$，在$[t^2, 1]$上作为两段凸曲线的并，其导数在连接点处渐增，故$\widetilde{H}(x)$在$[t^2, 1]$上凸，又当$t^2 \leqslant x < t$时

$$\frac{x\widetilde{H}'(x)}{\widetilde{H}(x)} = \frac{x/tK'(x/t)}{K(x/t)} = \frac{yK'(y)}{K(y)} \ (t \leqslant y \leqslant 1)$$

从而$C \leqslant x\widetilde{H}'(x)/\widetilde{H}(t) \leqslant D$.

现在构造一个例子. 取定义于$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$上的两个函数$M(x), \phi(x)$，使其满足引理的4.3全部条件并且有$M\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda < 1$. 使用数学归纳法，将$M, \phi$延拓为$[0, 1]$上的函数. 置$t_n = 2^{-2^{n-1}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 设已将M, ϕ延拓为$[t_{3n+1}, 1]$上函数，满足引理4.3的条件以及

$$M(t_{3n+1})/\phi(t_{3n+1}) = \lambda^{2^{n-1}}$$

现在继续向$[t_{3n+4}, 1]$上延拓，置

$$M(x) = M(t_{3n+1})\phi(x/t_{3n+1}),\ \phi(x) = \phi(t_{3n+1})\phi(x/t_{3n+1}),$$
$$(t_{3n+1} \geqslant x \geqslant t_{3n+2})$$
$$M(x) = M(t_{3n+2})M(x/t_{3n+2}),\ \phi(x) = \phi(t_{3n+2})\phi(x/t_{3n+2}),$$
$$(t_{3n+2} \geqslant x \geqslant t_{3n+3})$$
$$M(x) = M(t_{3n+3})M(x/t_{3n+3}),\ \phi(x) = \phi(t_{3n+3})M(x/t_{3n+3}),$$
$$(t_{3n+3} \geqslant x \geqslant t_{3n+4})$$

由引理4.3, M, ϕ在$[t_{3(n+1)+1}, 1]$上满足所述要求，同时

$$M(t_{3n+4})/\phi(t_{3n+4}) = M(t_{3n+3})/\phi(t_{3n+3})$$
$$= M^2(t_{3n+2})/\phi^2(t_{3n+2}) = M^2(t_{3n+1})/\phi^2(t_{3n+1}) = \lambda^{2^n}$$

再令$M(0) = \phi(0) = 0$，即完成了延拓并且M, $\phi \in \Delta_2$.

由$\lim\limits_{n \to \infty} M(t_n)/\phi(t_n) = 0$知$M$, ϕ不等价.

依照函数构成方式直接验证

$$\phi(x) = \frac{M(t_{3n+1}x)}{M(t_{3n+1})} \qquad (t_{3n+1} \leqslant x \leqslant 1)$$

$$M(x) = \frac{\phi(t_{3n+3}x)}{\phi(t_{3n+3})} \qquad (t_{3n+3} \leqslant x \leqslant 1)$$

鉴于 $M, \phi \in \Delta_2$，$\{t_{3n+1}\}$，$\{t_{3n+3}\}$ 各有子列 $\{s_m\}$，$\{r_m\}$ 使

$$|\phi(x) - M(s_m x)/M(s_m)| \leqslant 2^{-2m},$$

$$|M(x) - \phi(r_m x)/\phi(r_m)| \leqslant 2^{-2m} (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

再据 $\lim\limits_{m\to\infty} M(s_m) = \lim\limits_{m\to\infty} \phi(r_m) = 0$，$M$，$\phi$ 又都以 1 为上界，不妨设

$$|\phi(x) - [1/M(s_m)]M(s_m x)| \leqslant 2^{-m},$$

$$|M(x) - [1/\phi(r_m)]\phi(r_m x)| \leqslant 2^{-m} \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

由此推得 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \phi(a_m) < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{M(s_m)}\right] M(s_m a_m) < \infty$；

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} M(b_m) < \infty \Leftrightarrow \sum\limits_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\phi(r_m)}\right] \phi(r_m b_m) < \infty$。用引理 4.1，4.2 证明中已经用过的推理可知 l_ϕ 同构于 l_M 的一个由块基列张成的子空间，从而 l_M 有子空间X，使 $l_M \approx l_\phi \oplus X$。同理 $l_\phi \approx l_M \oplus Y$，Y 是 l_ϕ 的子空间。由 Pelczynsky 分解原理

$$l_\phi \approx l_M \oplus Y \approx l_M \oplus l_M \oplus Y \approx l_M \oplus l_\phi \approx l_\phi \oplus X \oplus l_\phi \approx l_\phi \oplus X \approx l_M$$

即 l_ϕ 与 l_M 同构。但ϕ与M不等价，l_ϕ 的单位向量基同 l_M 的单位向量基不等价。从而 l_M 中与 l_ϕ 的单位向量基等价的对称基必同 l_M 自身的单位向量基不等价。

这一例子并不奇异，人们甚至可以举出一类 Orlicz 序列空间，其两两不等价的对称基有不可数个之多。

称N函数 F 为极小 N 函数，乃指 $E_{F,1}$ 不存在真闭子集 E，使映射 T_t $(0<t<\infty)$ 满足 $T_t E \subset E$。换言之，对任何 $G \in E_{F,1}$，有 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，使 $T_{t_i G}$ 一致地趋于 F。由极小 N 函数生成的空间称极小 Orlicz 空间。l^p $(p \geqslant 1)$ 是极小 Orlicz空间，非l^p的极小 Orlicz 空间的例子见[3]。

定理 4.4 若 F 是不等价于任何 $x^p(p\geqslant 1)$ 的极小 N 函数，则 l_F 有不可数多两两不等价的对称基.

证 由 F 的极小性和 Pelczynsky 分解原理，对于每一个 $G\in E_{F,1}$，均有 l_G 同构于 l_F. 所以我们只须证明 $E_{F,1}$ 中含有不可数多互不等价的函数.

若 $E_{F,1}$ 中仅有可数多互不等价函数 G_1, G_2, …. F 所在等价类仍记为 F. 对自然数 i, k, 记

$$A_{i,k}=\left\{H\in E_{F,1}:\frac{1}{k}\leqslant\frac{H(x)}{G_i(x)}\leqslant k\quad(0<x\leqslant 1)\right\}$$

则 $A_{i,k}$ 闭. 其并覆盖 $E_{F,1}$. 由 Baire 纲定理，有某 $A_{i,k}$ 含开集 O. 由 F 极小，对任何 $H\in E_{F,1}$，有 t，使 $\frac{H(tx)}{H(t)}\in O$（否则将存在闭子集 $E\subset E_{F,1}\backslash O$，使对任何 t，$T_tE\subset E$）. 因 $H(x)$ 等价于 $H(tx)/H(t)$，故 $E_{F,1}$ 中仅含一个等价类，即 $E_{F,1}$ 中函数都等价于 F.

对于 t，$0<t<1$，集 $B_t=\{H\in E_{F,1}:H(tx)/H(t)\in O\}$ 是开集且已知 $\bigcup_{0<t\leqslant 1}B_t\supset E_{F,1}$. 由 $E_{F,1}$ 紧，有 $u>0$，$\bigcup_{u\leqslant t\leqslant 1}B_t=E_{F,1}$. 即对每个 s，$0<s\leqslant 1$，有 t，$u\leqslant t\leqslant 1$ 使 $F(stx)/F(st)\in O$. 亦即 $\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{F(stx)}{F(st)F(x)}\leqslant k^2$ $(0<x\leqslant 1)$. 由于 $t\geqslant u$，依 Δ_2 条件存在 $C>0$，使

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{F(sx)}{F(s)F(x)}\leqslant C\quad(0<s,\ x\leqslant 1)$$

由 G. Polya, G.Szegö, "Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 2nd edition, Springer-Verlag, 1954 的 Problem99 得知 $F(x)$ 等价于某 $x^p(p\geqslant 1)$. 与假设矛盾. 证毕.

由于 l_M 的每一对称基都与某—Orlicz 序列空间的单位向量基等价，定理 4.4意味着，一个 Orlicz 序列空间可以有不可数个互不等价的表现形式. 或者说，不可数个互不等价的 N函数可以

生成互相同构的 Orlicz 序列空间，这个出人意料的事实是序列空间特有的.

§2 几何参数和一致非$l_n^{(1)}$性

本节集中讨论空间l_M的装球常数的一种表示式，围线长与空间自反性、可分性的关系，一致非 $l_n^{(1)}$ 的判据等，推理过程表现了对序列问题的特殊处理方法，其中许多是不能平行移植到函数问题上来处理的.

首先建立若干预备命题.

引理 4.3 设 $M\in\Delta_2$.对于$c,\varepsilon>0$，存在$\delta>0$,使$\sum\limits_{i\in I'}M(x_i)\leqslant c$, $\sum\limits_{i\in I'}M(y_i)<\delta$ 蕴涵

$$\left|\sum_{i\in I'}M(x_i+y_i)-\sum_{i\in I'}M(x_i)\right|<\varepsilon$$

此处 I' 是任意的可数指标集.

证明 与第一章引理 1.3 雷同，此处从略.

推论 设 $M\in\Delta_2$，对 $\delta>0$，存在 $a>0$，使 $\sum\limits_{i\in I'}M(x_i)\geqslant\delta$, $\sum\limits_{i\in I'}M(y_i)<\frac{\delta}{2}$ 蕴涵 $\sum\limits_{i\in I'}(x_i-y_i)\geqslant a$. I' 是任意的可数指标集.

证 从略.

引理 4.4 设 $M\in\Delta_2$. 对 S_M 上点列， $x=\{x^{(n)}\}$， $\delta>0$，有 x 的子列$y=\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，自然数列 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

(1) $\quad\sum\limits_{i=Q_k+1}^{\infty}M(y_i^{(k)})<\delta\ (k=1,2,\cdots)$;

(2) $\quad\sum\limits_{i=1}^{Q_{k-1}}M(y_i^{(n)}-y_i^{(m)})<\delta\ (k=2,3,\cdots;m,n\geqslant k)$;

(3) $\quad\sum\limits_{i=Q_{k-1}+1}^{Q_k}M(y_i^{(n)})<\delta\ (k=2,3,\cdots;n>k)$.

证 由于 $|x_i^{(n)}|\leqslant M^{-1}(1)\ (n,i=1,2,\cdots)$，用对角线方法

从 x 中选出子列，仍记为 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，满足

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = a_i \quad (i=1,2,\cdots) \tag{4.7}$$

令 $Q_0=0, y^{(1)}=x^{(1)}$。取 $Q_1>Q_0$，使 $\sum\limits_{i=Q_1+1}^{\infty} M(y_i^{(1)})<\delta$。由

(4.7) 对Q_1，有$N_1>1$，使当 $m,n\geqslant N_1$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{Q_1} M(x_i^{(m)}-x_i^{(n)})$

$<\delta/2<\delta$。令$y^{(2)}=x^{(N_1)}$。取 $Q_2>Q_1$，使 $\sum\limits_{i=Q_2+1}^{\infty} M(y_i^{(2)})<\delta$。

对 Q_2，有$N_2>N_1$，使当 $m,n\geqslant N_2$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{Q_2} M(x_i^{(m)}-x_i^{(n)})<\delta/2$

$<\delta$。令 $y^{(3)}=x^{(N_2)}$。按如此方式继续下去，最后得到的$\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$已经满足 (1) 和 (2)。

若只有有限个$y^{(n_j)}(j=1,2,\cdots m)$ 不满足(3)，则从 $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$中剔除前 n_m 个便得所需子列，现设存在 n_j，k_j，$n_j>k_j$，

$\sum\limits_{i=Q_{k_{j-1}}+1}^{Q_{k_j}} M(y_i^{(n_j)})\geqslant\delta(j=1,2,\cdots)$。这里不妨设 $k_1, k_2, \cdots$ 两两不等，因若只有有限个不同的 k_j，设其最大者为 k_{j_0}，则从 $\{y^{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 中剔除前 n_{j_0} 个，则得所需子列。

取自然数 m，$ma>1$ (a 是由δ按引理 4.3 推论所得的正数)。取 $n>n_m$，注意 (2)。

$$\sum_{i=Q_{k_{j-1}}}^{Q_{k_j}} M(y_i^{(n)}-y_i^{(n_j)})\leqslant\sum_{i=1}^{Q_{k_j}} M(y_i^{(n)}-y_i^{(n_j)})<\delta/2$$

由引理 4.3 推论立即可得 $\sum\limits_{i=Q_{k_{j-1}}+1}^{Q_{k_j}} M(y_i^{(n)})\geqslant a$。从而

$$\rho_M(y^{(n)})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=Q_{k-1}+1}^{Q_k} M(y_i^{(n)})\geqslant\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=Q_{k_{j-1}}+1}^{Q_{k_j}} M(y_i^{(n)})$$

$$\geqslant ma>1$$

与 $y^{(n)}\in S_M$ 矛盾。

引理 4.5 若 $M\in\Delta_2$，则对任何 $\varepsilon, 0<\varepsilon\leqslant1$，有 $x\in S_M$ 使

$\rho_M(x)\leqslant\varepsilon$.

证 存在 u_k，$0<u_k<M^{-1}(\varepsilon/2^k)$，

$$M\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k\right)>2^{k+1}M(u_k)\quad(k=1,2,\cdots).$$

置

$$x=(\overbrace{u_1u_1\ u_1\cdots\cdots u_1}^{[\varepsilon/2M(u_1)]};\ \cdots\ \overbrace{u_k\ u_k\cdots\cdots\cdots\cdots u_k}^{[\varepsilon/2^kM(u_k)]};\ \cdots)$$

则 $\rho_M(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon}{2^kM(u_k)}\right]M(u_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$。但对任何整数 m

$$\rho_M\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon}{2^kM(u_k)}\right]M\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)u_k\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}M(u_k)}M\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}M(u_k)}2^{k+1}M(u_k)=\infty$$

这表明 $\|x\|=1$。

在 $M\in\Delta_2$ 的前提下，可以为空间 l_M 引进新的表征数 $d_n(n=2,3,\cdots)$。对固定的 $x\in S_M$，$\rho_M\left(\frac{x}{c}\right)$ 是关于 $c\in(0,\infty)$ 的连续、严格降函数。故有唯一的 $c_x>0$，使 $\rho_M\left(\frac{x}{c_x}\right)=\frac{1}{n}$。显然 $1<c_x<n$。

定义 $d_n=\sup\limits_{x\in S_M}\{c_x:\rho_M(x/c_x)=1/n\}\quad(n=2,3,\cdots)$。

我们先来阐明 d_n 的几何意义。以 $\mathbf{x}$ 记 S_M 上无穷点列，$D_n(\mathbf{x})=\inf\{\|x^{(1)}\pm x^{(2)}\pm\cdots\pm x^{(n)}\|:x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)}\in\mathbf{x}\}$。这里 inf 取自 $\mathbf{x}$ 一切 n 点组和一切正负号排列，又记 $D_n=\sup\limits_{\mathbf{x}}D_n(\mathbf{x})$。$D_n$ 是这样一个数：若 $r\leqslant D_n$，则有无穷多个单位向量，其中任何 n 个组成的平行 $2n$ 面体的最短对角线不小于 r；若 $r>D_n$，则不存在满足以上要求的无穷多个单位向量。

引理 4.6 若 $M\in\Delta_2$，则 $d_n=D_n(n=2,3,\cdots)$.

证 任给 $\varepsilon>0$，有$y\in S_M,\rho_M\left(\frac{y}{c_y}\right)=\frac{1}{n},c_y>d_n-\varepsilon$.令

$$x^{(1)}=(y_1 0 y_2 0 y_3 0 y_4 0 y_5 0 y_6 0 y_7 0\cdots)$$

$$x^{(2)}=(0 y_1 0 0 0 y_2 0 0 0 y_3 0 0 0 y_4\cdots)$$

$$x^{(3)}=(0 0 0 y_1 0 0 0 0 0 0 0 y_2 0 0\cdots)$$

$\cdots\cdots$

$x=\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}\subset S_M$，任取$x^{(k_1)},x^{(k_2)},\cdots,x^{(k_n)}\in x$

$$\rho_M\left(\frac{x^{(k_1)}\pm x^{(k_2)}\pm\cdots\pm x^{(k_n)}}{d_n-\varepsilon}\right)=n\rho_M\left(\frac{y}{d_n-\varepsilon}\right)$$

$$\geqslant n\rho_M\left(\frac{y}{c_y}\right)=1$$

从而$\|x^{(k_1)}\pm x^{(k_2)}\pm\cdots\pm x^{(k_n)}\|\geqslant d_n-\varepsilon$。这表明 $D_n(x)\geqslant d_n-\varepsilon$，更有$D_n\geqslant d_n-\varepsilon$。由于 ε 任意，$D_n\geqslant d_n$。

以下仅就 n 为奇数情形证明 $D_n\leqslant d_n$。

任给 $\varepsilon>0$，对任何 $x\in S_M$

$$\rho_M\left(x/(d_n+\varepsilon)\right)\leqslant\frac{d_n}{d_n+\varepsilon}\rho_M\left(\frac{x}{d_n}\right)\leqslant\frac{1}{n}(1-\varepsilon_1)$$

这里 $\varepsilon_1=\varepsilon/(d_n+\varepsilon)>0$. 由引理 4.3，有$\delta>0$，使 $\sum\limits_{i\in I'}M(x_i)\leqslant1$，$\sum\limits_{i\in I'}M(y_i)<\delta$ 蕴涵

$$\left|\sum_{i\in I'}M(x_i+y_i)-\sum_{i\in I'}M(x_i)\right|<\frac{\varepsilon_1}{n}$$

取 $c>0$，使当 $0\leqslant u\leqslant M^{-1}(1)$ 时 $M(nu)\leqslant cM(u)$。

对于 S_M 的无限集x，据引理 4.4，有x的子集 $Y=\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 和$1=Q_0<Q_1<Q_2<\cdots$满足

$$\sum_{i=Q_k+1}^{\infty}M(y_i^{(p)})<\delta/c\quad(k=1,2,\cdots;\ p\leqslant k)$$

$$\sum_{i=1}^{Q_{k-1}}M(y_i^{(p)}-y_i^{(q)})<\delta/c\quad(k=2,3,\cdots;p,q\geqslant k)$$

$$\sum_{i=Q_{k-1}+1}^{Q_k} M(y_i^{(p)}) < \delta/c \quad (k=2,3\cdots;p>k)$$

我们估算$\|y^{(1)}+y^{(2)}-y^{(3)}+\cdots+y^{(n-1)}-y^{(n)}\|$

$$\rho_M\left(\frac{y^{(1)}+y^{(2)}-\cdots-y^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right)=\left(\sum_{i=1}^{Q_1}+\sum_{i=Q_1+1}^{Q_2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\sum_{i=Q_{n-1}+1}^{\infty}\right)M\left(\frac{y_i^{(1)}-y_i^{(2)}-\cdots-y_i^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{Q_1} M\left(\frac{y_i^{(2)}-y_i^{(3)}+\cdots-y_i^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{Q_1} M(y_i^{(2)}-y_i^{(3)}+\cdots-y_i^{(n)})$$

$$\leqslant \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{Q_1}\left\{M\left[\frac{n-1}{2}(y_i^{(2)}-y_i^{(3)})\right]\right.$$

$$\left.+\cdots+M\left[\frac{n-1}{2}(y_i^{(n-1)}-y_i^{(n)})\right]\right\}$$

$$\leqslant \frac{2}{n-1}c\sum_{i=1}^{Q_1}\{M(y_i^{(2)}-y_i^{(3)})$$

$$+\cdots+M(y_i^{(n-1)}-y_i^{(n)})\}\leqslant\frac{2c}{n-1}\quad\frac{n-1}{2}\quad\frac{\delta}{c}=\delta$$

从而

$$\sum_{i=1}^{Q_1} M\left(\frac{y_i^{(1)}+y_i^{(2)}-\cdots-y_i^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{Q_1} M\left(\frac{y_i^{(1)}}{d_n+\varepsilon}\right)+\frac{\varepsilon_1}{n}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}(1-\varepsilon_1)+\frac{\varepsilon_1}{n}=\frac{1}{n}$$

又

$$\sum_{i=Q_1+1}^{Q_2} M\left(\frac{y_i^{(1)}-y_i^{(3)}+\cdots-y_i^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{n-1} \sum_{i=O_1+1}^{O_2} \{M[(n-1)y_i^{(1)}]$$

$$+ \cdots + M[(n-1)y_i^{(n)}]\}$$

$$\leqslant \frac{c}{n-1} \sum_{i=O_1+1}^{O_2} \{M(y_i^{(1)}) + M(y_i^{(3)}) + \cdots + M(y_i^{(n)})\}$$

$$\leqslant \frac{c}{n-1}(n-1)\frac{\delta}{c} = \delta$$

从而

$$\sum_{i=O_1+1}^{O_2} M\left(\frac{y_i^{(1)} + y_i^{(3)} - \cdots - y_i^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=O_1+1}^{O_2} M\left(\frac{y_i^{(2)}}{d_n+\varepsilon}\right) + \frac{\varepsilon}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

$\cdots\cdots$

最后由 $\sum_{i=O_{n-2}+1}^{\infty} M\left(\frac{y_i^{(1)} + y_i^{(2)} - \cdots + y_i^{(n-1)}}{d_n+\varepsilon}\right) < \delta$ 可得

$\sum_{i=O_{n-1}+1}^{\infty} M\left(\frac{y_i^{(1)} + \cdots - y_i^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ 综合上述讨论，

$\rho_M\left(\frac{y_i^{(1)} + y^{(2)} - \cdots - y^{(n)}}{d_n+\varepsilon}\right) \leqslant 1$。这表明$\|y^{(1)} + y^{(2)} - \cdots - y^{(n)}\|$

$\leqslant d_n + \varepsilon$。于是更有$D_n(Y) \leqslant d_n + \varepsilon$，以及 $D_n(x) \leqslant d_n + \varepsilon$。考虑到 ε 的任意性，$D_n(x) \leqslant d_n$。再考虑x的任意性立即可得 $D_n \leqslant d_n$。

以下使用 d_n 这一工具给出装球常数表示式和一致非$l_n^{(1)}$性的两定理。

定理 4.5 l_M 的装球常数记为 Λ_M，则

(1) $\Lambda_M = d_2/(d_2+2)$ $(M \in \Delta_2)$；

(2) $\Lambda_M = 1/2$ $(M \overline{\in} \Delta_2)$。

证 (1) 是第 0 章定理 0.43 和引理 4.6 的直接推论。今证 (2)。设 $M \overline{\in} \Delta_2$。对任给的 $\varepsilon > 0$，有 $u_n \downarrow 0$，$u_n < 1/2^n$ 且 $M(2/(2-\varepsilon) \cdot u_n) > 2^{n+1} M(u_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$。取正整数 k_n，

$1/2^{n+1} \leqslant k_n M(u_n) < 1/2^n$ $(n=1, 2, \cdots)$；取 $c>0$，$M(c) + \sum_{n=1}^{\infty} k_n M(u_n) = 1$。置

$$x^{(1)} = (c \overbrace{-u_1 - u_1 \cdots - u_1}^{k_1} \overbrace{u_2 u_2 \cdots u_2}^{k_2} \overbrace{u_3 u_3 \cdots u_3}^{k_3} \cdots)$$

$$x^{(2)} = (c \overbrace{u_1 u_1 \cdots u_1}^{k_1} \overbrace{-u_2 - u_2 \cdots - u_2}^{k_2} \overbrace{u_3 u_3 \cdots u_3}^{k_3} \cdots)$$

$$x^{(3)} = (c \overbrace{u_1 u_1 \cdots u_1}^{k_1} \overbrace{u_2 u_2 \cdots u_2}^{k_2} \overbrace{-u_3 - u_3 \cdots - u_3}^{k_3} \cdots)$$

$\cdots\cdots$

则 $\|x^{(j)}\| = 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$。而对于 $i \neq j$

$$\rho_M\left(\frac{x^{(i)} - x^{(j)}}{2-\varepsilon}\right) = k_i M\left(\frac{2u_i}{2-\varepsilon}\right)$$

$$+ k_j M\left(\frac{2u_j}{2-\varepsilon}\right) > k_i 2^{i+1} M(u_i) \geqslant 1$$

这表明 $D_2(x) \geqslant 2 - \varepsilon$，更有 $D_2 \geqslant 2 - \varepsilon$。因 ε 任意，$D_2 = 2$。从而 $\Lambda_M = 1/2$。

定理 4.6 l_M 是一致非 $l_n^{(1)}(n \geqslant 2)$ 的充分必要条件是 $M \in \Delta_2$ 和 $d_n < n$。

证 必要性 若 $M \overline{\in} \Delta_2$。对任何 $\varepsilon > 0$，有 $u > 0$，$M(u) < 1/2^{n-1}$，$M\left(\frac{n}{n-\varepsilon} u\right) > 2^n M(u)$。取 m 及 $v > 0$，$\frac{1}{2^n} < mM(u) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$，$M(v) + m 2^{n-1} M(n) = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$。

将序列段 $(\cdots \overbrace{uu \cdots u}^{m} \cdots)$ 记为 $(\cdots U \cdots)$，$(\cdots \overbrace{-u - u \cdots - u}^{m} \cdots)$ 记为 $(\cdots \overline{U} \cdots)$，置

$$x^{(1)} = (v \overbrace{UUU \cdots UU}^{2^{n-1}} oo \cdots)$$

$$x^{(2)} = (v \overbrace{U U \cdots U}^{2^{n-2}} \overbrace{\overline{U}\,\overline{U} \cdots \overline{U}}^{2^{n-2}} oo \cdots)$$

……

$$x^{(n-1)}=(vUU\overline{U}\,\overline{U}\cdots UU\overline{U}\,\overline{U}oo\cdots)$$

$$x^{(n)}=(vU\overline{U}U\overline{U}\cdots\cdots U\overline{U}oo\cdots)$$

易见$\|x^{(k)}\|=1\quad(k=1,2,\cdots,n)$．而

$$\rho_M\left(\frac{x^{(1)}\pm x^{(2)}\pm\cdots\pm x^{(n)}}{n-\varepsilon}\right)>mM\left(\frac{nu}{n-\varepsilon}\right)>m2^nM(u)>1$$

从而$\|x^{(1)}\pm x^{(2)}\pm\cdots\pm x^{(n)}\|>n-\varepsilon$．与一致非$l_n^{(1)}$矛盾．

若$d_n=n$，则对$\varepsilon>0$，有$y\in S_M$，$\rho_M(y/c_y)=1/n$，$c_y>n-\varepsilon$．置

$$x^{(1)}=(\overbrace{y_1 o\cdots o}^{n}\ \overbrace{y_2 o\cdots o}^{n}\ \overbrace{y_3 o\cdots o}^{n}\cdots)$$

$$x^{(2)}=(\overbrace{oy_1 o\cdots o}^{n}\ \overbrace{oy_2 o\cdots o}^{n}\ \overbrace{oy_3 o\cdots o}^{n}\cdots)$$

$$x^{(3)}=(\overbrace{ooy_1\cdots o}^{n}\ \overbrace{ooy_2\cdots o}^{n}\ \overbrace{ooy_3\cdots o}^{n}\cdots)$$

……

$$x^{(n)}=(\overbrace{o\cdots oy_1}^{n}\ \overbrace{o\cdots oy_2}^{n}\ \overbrace{o\cdots oy_3}^{n}\cdots)$$

易见$\|x^k\|=\|y\|=1\quad(k=1,2,\cdots,n)$．但对任何符号排列

$$\rho_M\left(\frac{x^{(1)}\pm x^{(2)}\pm\cdots\pm x^{(n)}}{n-\varepsilon}\right)=n\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{y_i}{n-\varepsilon}\right)$$

$$\geqslant n\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{y_i}{c_y}\right)=1$$

从而$\|x^{(1)}\pm x^{(2)}\pm\cdots\pm x^{(n)}\|\geqslant n-\varepsilon$．与一致非$l_n^{(1)}$矛盾．

充分性　若l_M不是一致非$l_n^{(1)}$的，则有一列n点组$\{x^{(k,1)}x^{(k,2)}\cdots x^{(k,n)}\}\subset S_M\quad(k=1,2,\cdots)$使

$$\lim_{k\to\infty}\rho_M\left(\frac{x^{(k,1)}\pm x^{(k,2)}\pm\cdots\pm x^{(k,n)}}{n}\right)=1\qquad(4.8)$$

对任何一种符号排列均成立．

记

$$I^{(k;j)}=\{i\in I:|x_i^{(k,j)}|=\max_{1\leqslant j'\leqslant n}|x_i^{(k,j')}|\}$$

$$(k=1,2,\cdots;\ \ j=1,2,\cdots,n)$$

则可以断言，对任何 j，$1\leqslant j\leqslant n$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in I^{(k,j)}}M\left(\frac{x_i^{(k,1)}+\cdots+x_i^{(k,j-1)}+x_i^{(k,j+1)}+\cdots+x_i^{(k,n)}}{n}\right)=0 \tag{4.9}$$

事实上，若（4.9）式对某 j，不妨设 $j=n$，不成立，则有 $\sigma>0$，使

$$\sum_{i\in I^{(k,j)}}M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)>\sigma \tag{4.10}$$

对无穷多个 k 成立，这里无妨认为对一切 k 成立。记

$$A_k=\left\{i\in I^{(k,n)}:|x_i^{(k,j)}|\geqslant\left|\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,n)}\right|,\right.$$

$$\left.x^{i(k,n)}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,j)}\geqslant 0\right\}$$

$$B_k=\left\{i\in I^{(k,n)}:|x_i^{(k,n)}|\geqslant\left|\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,j)}\right|,\right.$$

$$\left.x_i^{(k,n)}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,j)}<0\right\}$$

$$C_k=\left\{i\in I^{(k,n)}:|x_i^{(k,n)}|<\left|\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,n)}\right|,\right.$$

$$\left.x_i^{(k,n)}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,j)}\geqslant 0\right\}$$

$$D_k=\left\{i\in I^{(k,n)}:|x_i^{(k,n)}|<\left|\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,n)}\right|,\right.$$

$$\left.x_i^{(k,n)}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}x_i^{(k,j)}<0\right\}$$

由（4.10）式，$\sum\limits_{i\in A_k}$，$\sum\limits_{i\in B_k}$，$\sum\limits_{i\in C_k}$，$\sum\limits_{i\in D_k}M\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)>\sigma/4$ 之中至少有一个对无穷多个 k 成立。

今若 $\sum\limits_{i\in A_k}M\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)>\sigma/4$（$k=1$, 2, …），则

$$\rho_M\left(\frac{x_i^{(k,1)}+x^{(k,2)}+\cdots+x^{(k,j-1)}-x^{(k,j)}}{n}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i\in A_k} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} x_i^{(k,j)} - \frac{1}{n}x_i^{(k,n)}\right)$$

$$+\sum_{i\in I\setminus A_k} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i^{(k,j)}|\right)$$

$$\leqslant \sum_{i\in A_k} M\left(\frac{1}{n}x_i^{(k,n)}\right)+\frac{1}{n}\sum_{i\in I\setminus A_k}\sum_{j=1}^{n} M(x_i^{(k,j)})$$

$$\leqslant \sum_{i\in A_k} M\left(\frac{1}{n}x_i^{(k,n)}\right)+\frac{1}{n}\sum_{i\in I\setminus A_k}\sum_{j=1}^{n} M(x_i^{(k,j)})$$

$$+\sum_{i\in A_k} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)-\sigma/4$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i^{(k,j)})-\sigma/4=1-\sigma/4\quad(k=1,2,\cdots)$$

这同（4.8）式矛盾.

再若 $\sum_{i\in D_k} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)>\sigma/4\ (k=1,2,\cdots)$．此时若，$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in D_k} M\left(\frac{x_i^{(k,n)}}{n}\right)=0$，则 $\sum_{i\in D_k} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)\leqslant\sum_{i\in D_k} M(x_i^{(k,n)})$ $\leqslant C\sum_{i\in D_k} M\left(\frac{x_i^{(k,n)}}{n}\right)\to 0\ (k\to\infty)$．这与所论和式大于$\sigma/4$矛盾，因而不妨设

$$\sum_{i\in D_k} M\left(\frac{x_i^{(k,n)}}{n}\right)>\delta>0\quad(k=1,2,\cdots)$$

采用与上段相同的推理可得

$$\rho_M\left(\frac{x^{(k,1)}+x^{(k,2)}+\cdots+x^{(k,n-1)}+x^{(k,n)}}{n}\right)\leqslant 1-\delta$$

也同（4.8）式矛盾．至于 $\sum_{i\in B_k}$，$\sum_{i\in C_k} M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}x_i^{(k,j)}\right)>\sigma/4$ 也同样是不可能的．断言（4.9）式成立．

约定，若 $|x_i^{(k,j')}|=|x_i^{(k,j)}|=\max\limits_{1<j''<n}|x_i^{(k,j'')}|$，而 $j<j'$，则令 $i\in I^{(k,j)}\backslash I^{(k,j')}$。于是 $I^{(k,j)}\cap I^{(k,j')}=\phi(j\neq j')$，$\bigcup\limits_{j=1}^{n} I^{(k,j)}=I$。 $(k=1,\ 2,\ \cdots n)$.

记 $\varepsilon=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{d_n}{n}\right)>0$，由 引理4.3 存在 $\delta>0$，使当 $\sum\limits_{i\in I'}M(x_i)\leqslant 1$， $\sum\limits_{i\in I'}M(y_i)<\delta$ 时 $\sum\limits_{i\in I'}M(x_i+y_i)\leqslant\sum\limits_{i\in I'}M(x_i)+\varepsilon$。由上证之（4.9）式，有 k_0，$k\geqslant k_0$ 时

$$\sum_{i\in I^{(k,j)}}M\left(\frac{1}{n}\sum_{j'\neq j}x_i^{(k,j')}\right)<\delta(j=1,2,\cdots,n) \quad (4.11)$$

于是 $k\geqslant k_0$ 时，由（4.11）

$$\rho_M\left(\frac{x^{(k,1)}+x^{(k,2)}+\cdots+x^{(k,n)}}{n}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in I^{(k,j)}}M\left(\frac{x_i^{(k,j)}}{n}+\frac{1}{n}\sum_{j'\neq j}x_i^{(k,j')}\right)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in I^{(k,j)}}M\left(\frac{x_i^{(k,j)}}{n}\right)+\varepsilon\right)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\rho_M\left(\frac{x^{(k,j)}}{n}\right)$$

$$+n\varepsilon\leqslant\frac{d_n}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_M\left(\frac{x^{(k,j)}}{d_n}\right)+n\varepsilon\leqslant\frac{d_n}{n}+n\varepsilon$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{d_n}{n}\right)$$

这同（4.8）式矛盾。定理证毕。

下边讨论 l_M 的平坦性，我们给出平坦性判据的直接的、构造性的证明。

定理 4.7 l_M 平坦的充分必要条件是 $M\overline{\in}\Delta_2$。

证 必要性 设抽象函数 g^s（$0\leqslant s\leqslant 2$）满足 $\|g^s\|=1$ $(0\leqslant s\leqslant 2)$；$g^0=-g^2$；$\|g^{s_1}-g^{s_2}\|=|s_1-s_2|$ $(0\leqslant s_1,s_2\leqslant 2)$

对于 s，$0<s<2$，和 $k=1,2,\cdots$

$$g_k^0=\frac{s}{2}\ \frac{g_k^0-g_k^s}{s}+\frac{2-s}{2}\ \frac{g_k^0+g_k^s}{2-s}$$

从而

$$\frac{s}{2}M\left(\frac{g_k{}^0-g_k{}^s}{s}\right)+\frac{2-s}{2}M\left(\frac{g_k{}^0+g_k{}^\varepsilon}{2-s}\right)$$

$$-M(g_k{}^0)\geqslant 0 \tag{4.12}$$

注意到$\|g^0-g^\varepsilon\|=s$，$\|g^0+g^\varepsilon\|=2-s$，$\|g^0\|=1$，若 $M\in\Delta_2$，则有$\rho_M\left(\frac{g^0-g^\varepsilon}{s}\right)=1$，$\rho_M\left(\frac{g^0+g^s}{2-s}\right)=1$。于是

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{s}{2}M\left(\frac{g_k{}^0-g_k{}^\varepsilon}{s}\right)+\frac{2-s}{2}M\left(\frac{g_k{}^0+g_k{}^\varepsilon}{2-s}\right)-M(g_k{}^0)\right\}$$

$$=\frac{s}{2}\rho_M\left(\frac{g^0-g^\varepsilon}{s}\right)+\frac{2-s}{2}\rho_M\left(\frac{g^0+g^s}{2-s}\right)-\rho_M(g^0)=0$$

联系（4.12）式得

$$M(g_k{}^0)=\frac{s}{2}M\left(\frac{g_k{}^0+g_k{}^s}{2-s}\right)$$

$$+\frac{2-s}{2}M\left(\frac{g_k{}^0+g_k{}^s}{2-s}\right)\quad(k=1,\ 2,\ \cdots)$$

同样可以导出

$$M(g_k{}^s)=\frac{s}{2}M\left(\frac{g_k{}^s-g_k{}^0}{s}\right)$$

$$+\frac{2-s}{2}M\left(\frac{g_k{}^s+g_k{}^0}{2-s}\right)\quad(k=1,\ 2,\ \cdots;\ 0<s<2)$$

由 $M(u)$ 的偶性知 $M(g_k{}^0)=M(g_k{}^s)$ $(0<s<2)$，从而

$$|g_k{}^0|=|g_k{}^s|\qquad(0<s<2;\ k=1,2,\cdots) \tag{4.13}$$

因$\sum_{k=1}^{\infty}M(g_k{}^0)=1$，有$k_0$，$|g^0_{k_0}|>0$。对任何自然数$n$，考察$g^0_{K_0},g_{k_0}{}^{1/n},\cdots,g_{k_0}^{\frac{2n}{n}}=g^2_{k_0}$由（13），$|g_k{}^0|=|g_{K_0}^{\frac{j}{n}}|$（$j=1,\ 2,\ \cdots,2n-1$）。又 $g_{k_0}{}^0=-g_{k_0}{}^2$。故有 j_n，（$0\leqslant j_n\leqslant 2n-1$）满足

$$g^0_{k_0}=g_{k_0}^{\frac{j_n}{n}}=-g_{k_0}^{\frac{j_n+1}{n}}$$

这样一来，一方面 $\|g^{\frac{j_n+1}{n}}-g^{\frac{j_n}{n}}\|=\frac{j_n+1}{n}-\frac{j_n}{n}=\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，另一方面 $\rho_M(g^{\frac{j_n+1}{n}}-g^{\frac{j_n}{n}})\geqslant M\left(g_{k_0}^{\frac{j_n+1}{n}}-g_{k_0}^{\frac{j_n}{n}}\right)$
$=M(2g_{k_0}^{0})>0$。矛盾。

充分性　因 $M\in\Delta_2$，由引理 4.5 存在 $x^{(n)}\in S_M$，$\rho_M(x^{(n)})\leqslant\frac{1}{2^n}$，$\rho_M(\lambda x^{(n)})=\infty(\lambda>1)(n=1,2,\cdots)$。

将 $[-1,1)$ 的全体有理数排成以 -1 为首的无穷数列：$-1=r_1$，r_2，r_3，$\cdots$。

作 s 的函数 $a_n(s)$　$(0\leqslant s\leqslant 2)$

$$a_n(s)=\begin{cases}s+r_n & (0\leqslant s\leqslant 1-r_n)\\ 2-s-r_n & (1-r_n\leqslant s\leqslant 2)\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

显然 $|a_n(s)|\leqslant 1$ $(n=1,2,\cdots;0\leqslant s\leqslant 2)$，$a_n(0)=r_n=-a_n(2)$ $(n=1,2,\cdots)$。

构造 g^s $(0\leqslant s\leqslant 2)$ 如下：

$$g^s=(a_1(s)x_1^{(1)}\ a_1(s)x_2^{(1)}\ a_2(s)x_1^{(2)}\ a_1(s)x_3^{(1)}\ a_2(s)x_2^{(2)}\ a_3(s)x_1^{(3)}\cdots)$$

对固定的 s，$0\leqslant s\leqslant 2$

$$\rho_M(g^s)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M(a_n(s)x_k^{(n)})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M(x_k^{(n)})$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 \tag{4.14}$$

又对任何 $\lambda>1$，有 r_{n_0}，$-1\leqslant r_{n_0}<1$，使 $s+r_{n_0}$ 与 1 充分接近，致使 $\lambda(s+r_{n_0})>1$，即 $\lambda a_{n_0}(s)>1$。从而

$$\rho_M(\lambda g^s)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M(\lambda a_n(s)x_k^{(n)})$$
$$>\sum_{k=1}^{\infty}M(\lambda a_{n_0}(s)x_k^{(n_0)})=\infty$$

这表明 $\|g^s\|=1$ $(0\leqslant s\leqslant 2)$。

由 g^s 定义以及 $a_n(0)=-a_n(2)(n=1, 2, \cdots)$ 立刻得到 $g^0=-g^2$。

取 $s_1, s_2, 0\leqslant s_1, s_2\leqslant 2$，易见

$$\left|\frac{a_n(s_2)-a_n(s_1)}{s_2-s_1}\right|\leqslant 1 \quad (n=1,2,\cdots)$$

（当且仅当 $a_n(s)$ 在 $[s_1, s_2]$ 上为线性时等号才成立）。于是

$$\rho_M\left(\frac{g^{s_1}-g^{s_2}}{s_1-s_2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\frac{a_n(s_2)-a_n(s_1)}{s_2-s_1}x_k^{(n)}\right)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M(x_k^{(n)})\leqslant 1$$

而对任何 $\lambda>1$

$$\rho_M\left(\lambda\frac{g^{s_1}-g^{s_2}}{s_1-s_2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\lambda\frac{a_n(s_2)-a_n(s_1)}{s_2-s_1}x_k^{(n)}\right)$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\lambda\frac{a_1(s_2)-a_1(s_1)}{s_2-s_1}x_k^{(1)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}M(\lambda x_k^{(1)})=\infty$$

即 $\|g^{s_1}-g^{s_2}\|=|s_1-s_2|$。

这表明 $\{g^s\}(0\leqslant s\leqslant 2)$ 组成了球面上半长度为2的围线。l_M 平坦性获证。

Orlicz 序列空间 l_M 的许多几何特性都与空间的自反性等价，这不仅有别于一般 Banach 空间，而且有别于 Orlicz函数空间。作为准备，先给出引理4.7。

引理 4.7 $M\in\Delta_2$ 的另一说法是，对 $\delta>0$，存在 $\varepsilon>0$，使 $M((1+\varepsilon)u)<(1+\delta)M(u)$ 对较小的 u 成立。

证 充分性 取 m，$(1+\varepsilon)^m>2$，则对较小的 u，$M(2u)<M((1+\varepsilon)^m u)<(1+\delta)^m M(u)$。

必要性 对较小的u，$M(2u)\leqslant KM(u)$。取 ε，$\varepsilon(K-1)<\delta$，则 $M((1+\varepsilon)u)=M((1-\varepsilon)u+\varepsilon(2u))\leqslant(1-\varepsilon)M(u)+\varepsilon M(2u)$

$$\leqslant(1-\varepsilon+K\varepsilon)M(u)<(1+\delta)M(u).$$

作为本节结束，给出一个“一揽子”定理.

定理 4.8 下述说法等价

(1) l_M 自反（即$M\in\Delta_2\cap\nabla_2$）；

(2) l_M超自反；

(3) l_M 一致非方；

(4) $A_M<1/2$；

(5) $\mathrm{girth}(S_M)>4$；

(6) l_M 一致非 $l_n^{(1)}$ $(n\geqslant 2)$；

(7) l_M 亚自反；

(8) l_M 接近一致凸（NUC）.

证 (3)⇒(2)⇒(1) 见第0章定理 0.36. 若 (1) 成立，则 $M\in\nabla_2$. 由第一章定理 1.8，存在 θ，$0<\theta<1$，满足 $M\left(\frac{u}{2}\right)\leqslant\theta\frac{M(u)}{2}$ $(0\leqslant u\leqslant M^{-1}(1))$. 对此$\theta$援引引理 4.7，有 $\varepsilon>0$ 使

$$M\left(\frac{u}{2-\varepsilon}\right)=M\left(\frac{2}{2-\varepsilon}\frac{u}{2}\right)\leqslant\frac{1}{\theta}M\left(\frac{u}{2}\right)\leqslant\frac{M(u)}{2}$$

$$(0\leqslant u\leqslant M^{-1}(1))$$

这样一来对任何 $x\in S_M$

$$\rho_M\left(\frac{x}{2-\varepsilon}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{x_i}{2-\varepsilon}\right)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}M(x_i)=\frac{1}{2}$$

这表明 $c_x\leqslant 2-\varepsilon$，进而 $d_2\leqslant 2-\varepsilon<2$. 联系定理4.6立即可得 l_M 是一致非方的. 即 (1)⇒(3).

(3)⟺(4) 是定理 4.6 和定理 4.5 的直接推论.

(2)⟺(5) 见第0章定理0.38.

现证 (1)⟺(6). 已知 (1)⟺(3)⇒(6)，现若对某个 $n\geqslant 2$，l_M 是一致非 $l_n^{(1)}$ 的，由定理4.6，$M\in\Delta_2$ 和$d_n<n$ 成立，我们只须再证$M\in\nabla_2$，即有 θ，$0<\theta<1$

$$M\left(\frac{u}{n}\right)\leqslant\theta\ \frac{M(u)}{n} \tag{4.15}$$

对较小 u 成立.如不然,对 $\varepsilon>0$, 有 u, $0<M(u)<\varepsilon$, $M\left(\frac{u}{n}\right)>(1-\varepsilon)\frac{M(u)}{n}$. 取自然数 m, $1-\varepsilon\leqslant mM(u)<1$. 又取 $v>0$, $mM(u)+M(v)=1$, 显然 $M(v)<\varepsilon$. 置

$$x=(v\overbrace{uu\cdots u}^{m}oo\cdots)$$

则 $x\in S_M$且$\rho_M\left(\frac{x}{n(1-\varepsilon)}\right)\geqslant mM\left(\frac{u}{n(1-\varepsilon)}\right)>\frac{m}{1-\varepsilon}M\left(\frac{u}{n}\right)>\frac{m}{n}M(u)\geqslant\frac{1-\varepsilon}{n}$. 于是 $\rho_M\left(\frac{x}{n(1-\varepsilon)^2}\right)>\frac{1}{n}$. 这表明 $c_x\geqslant n(1-\varepsilon)^2$. 更有 $d_n\geqslant n(1-\varepsilon)^2$. 由 ε 的任意性, $d_n=n$. 矛盾. 故 (4.15) 式成立.

(1) ⇒ (7) 显然. 现证 (7)⇒(1) . l_M 亚自反 ⇒h_M 亚自反. 故 $\dim(l_N^*/h_M)=0$. 若 $M\bar{\in}\Delta_2$, 则 $\dim(l_N^*/h_M)\geqslant\dim(l_M/h_M)=\infty$. 若 $M\bar{\in}\nabla_2$,则 $\dim(l_N^*/h_M)\geqslant\dim(l_N^*/l_M)=\infty$. 故必有 $M\in\Delta_2\cap\nabla_2$, 即 l_M 自反.

第 0 章定义0.25之注表明 (8)⇒(1).为证 (1)⇒(8) 只须证自反性蕴涵一致 Kadec-Klec 性 (*UKK*) .其实只要 $M\in\Delta_2$就有 *UKK*.

如不然, 则有 $\varepsilon>0$, 使对任何 $\varepsilon'>0$, 有 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset U_M$, $\operatorname{sep}(x^{(n)})\geqslant\varepsilon$, $x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}(n\to\infty)$, 而 $\|x^{(0)}\|>1-\varepsilon'$.

因 $M\in\Delta_2$, 对此 ε, 有 $\eta>0$, 使 $\rho_M(x)<\eta$ 蕴涵 $\|x\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

再由引理 4.3, 存在 $\delta<\eta/5$, 使当 $\rho_M(x)\leqslant1$, $\rho_M(y)\leqslant\delta$时

$$|\rho_M(x+y)-\rho_M(x)|<\eta/5 \tag{4.16}$$

又因$M\in\Delta_2$, 存在$\varepsilon'>0$, 使当$\|x\|>1-\varepsilon'$时$\rho_M(x)>1-\eta/5$. 这表明取 $\{x^{(n)}\}\subset U_M$, $\operatorname{sep}(x^{(n)})\geqslant\varepsilon$, $x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}(\eta\to\infty)$, $\|x^{(0)}\|$

$>1-\varepsilon'$.则有 $\rho_M(x^{(0)})>1-\eta/5$.

取 i_0，使 $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M(x_i^{(0)})<\delta<\eta/5$.于是由 (16)

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})<\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M(x_i^{(n)})+\eta/5 \qquad (4.17)$$

因 $x^{(n)}\xrightarrow{W}x^{(0)}$ 等价于 $x_i^{(n)}\to x_i^{(0)}(i=1,2,\cdots)$. 取 n 足够大，使 $\sum_{i=1}^{i_0} M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})<\eta/5$，$\left|\sum_{i=1}^{i_0}(M(x_i^{(n)})-M(x_i^{(0)}))\right|<\eta/5$. 对这样的 n

$$\begin{aligned}\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M(x_i^{(n)}) &= \rho(x^{(n)})-\sum_{i=1}^{i_0} M(x_i^{(n)})\\ &\leqslant 1-\sum_{i=1}^{i_0} M(x_i^{(0)})+\eta/5\\ &=1+\eta/5-\left(\rho_M(x^{(0)})-\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M(x_i^{(0)})\right)\\ &\leqslant 1+\frac{\eta}{5}-\left(1-\frac{\eta}{5}-\frac{\eta}{5}\right)=3\eta/5\end{aligned}$$

由 (4.17)，(4.18) 式

$$\rho_M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})=\sum_{i=1}^{i_0} M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})$$

$$+\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M(x_i^{(n)}-x_i^{(0)})<\eta$$

于是 $\|x^{(n)}-x^{(0)}\|<\varepsilon/2$. 即当 n，m 充分大，$n\neq m$时，$\|x^{(n)}-x^{(m)}\|<\varepsilon$，与 $\mathrm{sep}(x^{(n)})\geqslant\varepsilon$相矛盾. 定理证毕.

§3 凸 性

Orlicz 序列空间 $[l_M,\|\cdot\|_{(M)}]$ 和 $[l_M,\|\cdot\|_M]$ 各种凸性判据多已获得. 为书写简便，引进记号：

"$M\in sc[0,a]$" 表示 $M(u)$ 在 $[0,a]$ 上严格凸，即对任何

$u,v\in[0,a]$，$u\neq v$，总有 $M\left(\frac{u+v}{2}\right)<\frac{1}{2}(M(u)+M(v))$.

"$M\in uc[0,a]$" 表示 $M(u)$ 在 $[0,a]$ 上一致凸，即对任何 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $u,v\in[0,a]$，$|u-v|\geq\varepsilon max(u,v)$ 时

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leq(1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}.$$

各种凸性判据如下表所示

范数 \ 判据 \ 凸性	一致凸	k一致凸	弱一致凸
$\|\cdot\|_{(M)}$	[17] [18] Δ_2 $uc[0,M^{-1}(\frac{1}{2})]$	[19] Δ_2 $uc[0,M^{-1}(\frac{1}{k+1})]$	[20] Δ_2 $uc[0,M^{-1}(\frac{1}{2})]$ 或 ∇_2 及 $sc[0,M^{-1}(1)]$
$\|\cdot\|_M$	[21] Δ_2 $uc[0,qN^{-1}(1)]$	[27] Δ_2 $uc[0,qN^{-1}(\frac{1}{k})]$	[21] Δ_2 $uc[0,qN^{-1}(1)]$

局部一致凸	局部弱一致凸	中点局部一致凸	H严格凸	严格凸	H性质
[26] Δ_2 $sc[0,M^{-1}(1)]$ 或 ∇_2 及 $sc[0,M^{-1}(\frac{1}{2})]$	[21] 同左	[22] Δ_2 $sc[0,M^{-1}(\frac{1}{2})]$	[23] 同左	[24] 同左	[23] Δ_2
[21] Δ_2,∇_2 $sc[0,qN^{-1}(1)]$	[21] 同左	[22] Δ_2 $sc[0,qN^{-}(1)]$	[23] 同左	[25] $sc[0,qN^{-1}(1)]$	[23] Δ_2

本节仍只讨论 $[l_M,\|\cdot\|_{(M)}]$，而且只给出颇具序列空间特色的局部一致凸、弱一致凸和 k 一致凸的判据的证明.

首先将严格凸判据列出而不予以证明.

定理 4.9 l_M 严格凸的充分必要条件是 $M\in\Delta_2$ 和

$M\in sc\left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$.

局部一致凸的判据比较奇特.

定理 4.10 l_M 局部一致凸的充分必要条件是

(1) $M\in \Delta_2$;

(2) $M\in sc\left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$;

(3) $M\in \nabla_2$ 或 $M\in sc\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), M^{-1}(1)\right]$.

证 必要性 因局部一致凸蕴涵严格凸, 由定理 4.9 立即可得(1),(2).若(3)不真, 则 $M(u)$ 在区间 $[a, b]\subset\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), M^{-1}(1)\right]$ 上的图形为直线段且存在 $u_k\searrow 0(k\to\infty)$ 使

$$M(u_k)/M\left(\frac{u_k}{2}\right)\to 2\ (k\to\infty)$$

取 $u_0\geqslant 0$, $M(b)+M(u_0)=1$. 取自然数 m_k 和 $v_k\geqslant 0$ 满足 $M(a)+M(u_0)+m_k M(u_k)\leqslant 1$, $M(a)+M(u_0)+(m_k+1)M(u_k)>1$ 同时还有 $M(a)+M(u_0)+m_k M(u_k)+M(v_k)=1$ $(k=1,2,\cdots)$. 置

$$x^{(0)}=(bu_0 00\cdots)$$

$$x^{(k)}=(a\,u_0\,\overbrace{u_k\,u_k\cdots u_k}^{m_k}\,v_k 00\cdots)\quad (k=1,2,\cdots)$$

易知 $x^{(0)},x^{(k)}\in S_M$ $(k=1,2,\cdots)$. 又

$$\rho_M\left(\frac{x^{(0)}+x^{(k)}}{2}\right)=M\left(\frac{b+a}{2}\right)+M(u_0)+m_k M\left(\frac{u_k}{2}\right)$$

$$+M\left(\frac{v_k}{2}\right)=\frac{M(b)+M(u_0)}{2}+\frac{1}{2}\{M(a)+M(u_0)$$

$$+m_k M(u_k)+M(v_k)\}+m_k\left\{M\left(\frac{u_k}{2}\right)-\frac{M(u_k)}{2}\right\}$$

$$+M\left(\frac{v_k}{2}\right)-\frac{M(v_k)}{2}=1+m_k\left\{M\left(\frac{(u_k)}{2}\right)\right.$$

$$-\frac{M(u_k)}{2}\Big\}+M\left(\frac{v_k}{2}\right)-\frac{M(v_k)}{2}\quad (k=1,2,\cdots)$$

注意到 $m_k\left|M\left(\frac{u_k}{2}\right)-\frac{M(u_k)}{2}\right|=\frac{m_kM(u_k)}{2}\left|\frac{M(u_k/2)}{M(u_k)/2}-1\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{M(u_k/2)}{M(u_k)/2}-1\right|\to 0(k\to\infty)$ 以及 $M(v_k)\leqslant M(u_k)\to 0$ $(k\to\infty)$．得到

$$\rho_M\left(\frac{x^{(0)}+x^{(k)}}{2}\right)\to 1\quad (k\to\infty)$$

即 $\left\|\frac{x^{(0)}+x^{(k)}}{2}\right\|\to 1$ $(k\to\infty)$．据局部一致凸性应 $\|x^{(k)}-x^{(0)}\|\to 0$ $(k\to\infty)$．但 $\rho_M(x^{(k)}-x^{(0)})\geqslant M(b-a)$ $(k=1,2,\cdots)$，矛盾.

充分性　设定理条件 (1)，(2) 成立而 l_M 不是局部一致凸的，即存在 $x^{(n)}$，$x\in S_M$ $(n=1,2,\cdots)$

$$\rho_M\left(\frac{x^{(n)}+x}{2}\right)\to 1\quad (n\to\infty) \tag{4.19}$$

而 $\|x^{(n)}-x\|\not\to 0(n\to\infty)$．不妨设

$$\rho_M(x^{(n)}-x)>a>0\quad (n=1,2,\cdots) \tag{4.20}$$

1．证明

$$2\beta=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq 1}|M(x_k)-M(x_k^{(n)})|>0 \tag{4.21}$$

如不然，则有 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列，仍用原记号，满足

$$\sup_{k\geq 1}|M(x_k)-M(x_k^{(n)})|\to 0\quad (n\to\infty) \tag{4.22}$$

此时显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_k^{(n)}|=|x_k|$ $(k=1,2,\cdots)$。我们进而断言

$$\lim_{n\to\infty}x_k^{(n)}=x_k\quad (k=1,2,\cdots) \tag{4.23}$$

否则，有 k_0，使（必要时可取子列）$\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_0}^{(n)}=-x_{k_0}$。于是

$$\rho_M\left(\frac{x^{(n)}+x}{2}\right)=\sum_{k\neq k_0}M\left(\frac{x_k^{(n)}+x_k}{2}\right)+M\left(\frac{x_{k_0}^{(n)}+x_{k_0}}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k\neq k_0}[M(x_k^{(n)})+M(x_k)]+\frac{M(x_{k_0}^{(n)})+M(x_{k_0})}{2}$$

$$-\frac{M(x_{k_0}^{(n)})+M(x_{k_0})}{2}+M\left(\frac{x_{k_0}^{(n)}+x_{k_0}}{2}\right)$$

$$\to 1-M(x_{k_0})\quad(n\to\infty)$$

与 (4.19) 式矛盾. 故 (4.23) 式成立. l_M 中依座标收敛等价于弱收敛. 又 $M\in\Delta_2$ 蕴涵 H 性质, 故 $\rho_M(x^{(n)}-x)\to 0(n\to\infty)$ 与 (4.20) 相矛盾. 于是 (4.21) 成立.

由 (4.21) 式, 对充分大的 n, 不妨设对一切 n, 有 k_n, 满足

$$|M(x_{k_n})-M(x_{k_n}^{(n)})|>\beta\quad(n=1,2,\cdots)\tag{4.24}$$

2. 证明 $M\in sc\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),\ M^{-1}(1)\right]$是不可能的

先证

$$M\left(\frac{x_{k_n}+x_{k_n}^{(n)}}{2}\right)-\frac{M(x_{k_n})+M(x_{k_n}^{(n)})}{2}\to 0\quad(n\to\infty)\tag{4.25}$$

如不然, 不妨设存在 $\delta>0$, 使

$$M\left(\frac{x_{k_n}+x_{k_n}^{(n)}}{2}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{M(x_{k_n})+M(x_{k_n}^{(n)})}{2}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

联系

$$\rho_M\left(\frac{x+x^{(n)}}{2}\right)=M\left(\frac{x_{k_n}+x_{k_n}^{(n)}}{2}\right)$$

$$+\sum_{k\neq k_n}M\left(\frac{x_k+x_k^{(n)}}{2}\right)$$

$$\leqslant(1-\delta)\frac{M(x_{k_n})+M(x_{k_n}^{(n)})}{2}+\sum_{k\neq k_n}\frac{M(x_k)+(x_k^{(n)})}{2}$$

$$=1-\frac{\delta}{2}(M(x_{k_n})+M(x_{k_n}^{(n)}))\leqslant 1-\frac{\delta\beta}{2}$$

与（4.19）式矛盾.（4.25）式成立.

不妨设 $x_{k_n}\to x_0$，$x_{k_n^{(n)}}\to x_0'(n\to\infty)$. 由（4.24）$x_0\neq x_0'$，可以设 $x_0'>x_0$. 对（4.25）取极限

$$M\left(\frac{x_0+x_0'}{2}\right)=\frac{M(x_0)+M(x_0')}{2}$$

这表明 $M(u)$ 在 $[x_0,x_0']$ 上是线性函数.由（2），只能是 $[x_0, x_0']\subset\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),\ M^{-1}(1)\right]$，即 $M\in sc\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),\ M^{-1}(1)\right]$.

从 $x_{k_n}\to x_0\geqslant M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$以及 $\sum_{k=1}^{\infty}M(x_k)=1$ 可知，n 充分大时，$\{k_n\}$ 至多是两元素集.因此 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列，仍用原记号，当 n 充分大时恒等于 k_0，即 $x_{k_n}\equiv x_{k_0}=x_0$.，与此同时 $x_{k_n^{(n)}}\equiv x_{k_0}^{(n)}\to x_0'$. 现在证明

$$\lim_{n\to\infty}x_k^{(n)}=x_k\quad(k\neq k_0)\tag{4.26}$$

如不然，有 $k\neq k_0$，$\varepsilon>0$ 以及 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$满足 $|M(x_k)-M(x_k^{(n_i)})|>\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots)$. 仿前段讨论可得 $M(x_k)\geqslant\frac{1}{2}$和$x'=\lim_{i\to\infty}|x_k^{(n_i)}|\geqslant M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. $x_k\neq x'$. 于是当 i 充分大时

$$\begin{aligned}2=\rho_M(x)+\rho_M(x^{(n_i)})\geqslant M(x_0)+M(x_k)+M(x_0')\\+M(x_k^{(n_i)})>2\end{aligned}$$

这一矛盾证明了（4.26）式为真.

3. 证明 $M\in\nabla_2$是不可能的.

若$M\in\nabla_2$，则有 $r>0$

$$M\left(\frac{u}{2}\right)<\left(\frac{1}{2}-r\right)M(u)\tag{4.27}$$

由引理 4.3，有$\eta>0$，$\rho_M(x)\leqslant1$，$\rho_M(y)<\eta$ 蕴涵

$$|\rho_M(x+y)-\rho_M(x)|<r\beta/6\tag{4.28}$$

取 $m>k_0$，使 $\sum_{k=m}^{\infty} M(x_k)<\min\left(\eta, \frac{\beta}{3}\right)$. 由(4.28)、(4.27)式有

$$
\begin{aligned}
\rho_M\left(\frac{x+x^{(n)}}{2}\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{M(x_k)+M(x_k^{(n)})}{2} \\
&+ \sum_{k=m}^{\infty} M\left(\frac{x_k^{(n)}}{2}\right)+\frac{r\beta}{6} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(x_k)}{2} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} M(x_k^{(n)})+\left(\frac{1}{2}-r\right)\sum_{k=m}^{\infty} M(x_k^{(n)})+\frac{r\beta}{6} \qquad (4.29)\\
&=1-r\sum_{k=m}^{\infty} M(x_k^{(n)})+\frac{r\beta}{6}
\end{aligned}
$$

由（4.26）式，n 充分大时，$\sum_{k=1}^{m-1}(M(x_k)-M(x_k^{(n)}))-(M(x_{k_0})-M(x_{k_0}^{(n)}))<\frac{\beta}{3}$. 联系 m的取法及（4.24）式有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} M(x_k^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{\infty} M(x_k) - \sum_{k=1}^{m-1} M(x_k^{(n)}) \\
&=\left\{\sum_{k=1}^{m-1}(M(x_k)-M(x_k^{(n)}))-(M(x_{k_0})-M(x_{k_0}^{(n)}))\right\} \\
&+(M(x_{k_0})-M(x_{k_0}^{(n)}))+\sum_{k=m}^{\infty} M(x_k) \\
&\geqslant \beta-\frac{\beta}{3}-\frac{\beta}{3}=\frac{\beta}{3}
\end{aligned}
$$

代入（4.29）式，$\rho_M\left(\frac{x+x^{(n)}}{2}\right)\leqslant 1-\frac{r\beta}{3}+\frac{r\beta}{6}=1-\frac{r\beta}{6}$.

与（4.19）式相矛盾，定理证毕.

弱一致凸判据也有相近的表述形式.

定理 4.11 l_M 弱一致凸的充分必要条件是

(1) $M\in\Delta_2$;

(2) $M\in\nabla_2$;

(3) $M\in sc[0,M^{-1}(1)]$ 或 $M\in uc\left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$.

证 充分性 若$M\in\Delta_2\cap\nabla_2\cap uc\left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$,则 l_M一致凸（见定理4.12证明）。当然更是弱一致凸。

现证 $M\in\Delta_2\cap\nabla_2\cap sc[0, \ M^{-1}(1)]$。设 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\subset S_M$而且$\left\|\frac{x^{(n)}+y^{(n)}}{2}\right\|\to 1(n\to\infty)$ 。

因 l_M 自反，易见弱收敛等价于按座标收敛．设有 i_0，使$|x_{i_0}-y_{i_0}^{(n)}|\geqslant\varepsilon_0>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 。则因 $M\in sc[0,M^{-1}(1)]$ 存在 $\delta_0>0$，使 $M\left(\frac{x_{i_0}^{(n)}+y_{i_0}^{(n)}}{2}\right)\leqslant(1-\delta_0)\frac{M(x_{i_0}^{(n)})+M(y_{i_0}^{(n)})}{2}$

$(n=1,2,\cdots)$ 。从而

$$\rho_M\left(\frac{x^{(n)}+y^{(n)}}{2}\right)=M\left(\frac{x_{i_0}^{(n)}+y_{i_0}^{(n)}}{2}\right)$$

$$+\sum_{i\neq i_0}M\left(\frac{x_i^{(n)}+y_i^{(n)}}{2}\right)\leqslant 1-\delta_0 M\left(\frac{x_{i_0}^{(n)}-y_{i_0}^{(n)}}{2}\right)$$

$$\leqslant 1-\delta_0\,M\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$$

这一矛盾证实了 $x_i^{(n)}-y_i^{(n)}\to 0(n\to\infty)$ $(i=1,2,\cdots)$ 。

必要性 弱一致凸蕴涵严格凸，故有 $M\in\Delta_2$ 和 $M\in sc\left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$。用与函数空间弱一致凸必要性的同样证法可得 $M\in\nabla_2$。

若 $M\in sc\left[M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), M^{-1}(1)\right]$ 和M在0点附近一致凸均不成立，则有$[a,\ b]\subset\left(M^{-1}\left(\frac{1}{2}\right),\ M^{-}(1)\right)$，$M(u)$ 在 $[a,b]$上是线性的；且存在 u_n，$v_n\searrow 0$，$u_n>v_n$，$u_n-v_n\geqslant\varepsilon u_n$满足

$$M\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)>\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{4.30}$$

取自然数 m_n，使

$$\min\{M(b)-M(a),1-M(b)\}>m_nM(u_n)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\min\{M(b)-M(a),1-M(b)\}\quad(n=1,2,\cdots)$$

又取$a_n>0$，使得

$$M(b)+m_nM(v_n)=M(a_n)+m_nM(u_n)\quad(n=1,2,\cdots)$$

再取$c_n>0$，使

$$M(b)+m_nM(v_n)+M(c_n)=M(a_n)+m_nM(u_n)+M(c_n)=1$$
$$(n=1,2,\cdots)$$

令

$$\left.\begin{aligned}x^{(n)}&=(bc_n\overbrace{v_nv_n\cdots v_n}^{m_n}00\cdots)\\ y^{(n)}&=(a_nc_n\overbrace{u_nu_n\cdots u_n}^{m_n}00\cdots)\end{aligned}\right.\quad(n=1,2,\cdots)$$

易见$x^{(n)}$，$y^{(n)}\in S_M$ $(n=1,2,\cdots)$。

因 $M(b)-M(a_n)=m_nM(u_n)-m_nM(v_n)\leqslant m_nM(u_n)<M(b)-M(a)$，故 $a_n>a$。又显然$a_n<b$ $(n=1,2,\cdots)$。因而由(4.30)式

$$\rho_M\left(\frac{x^{(n)}+y^{(n)}}{2}\right)=M\left(\frac{b+a_n}{2}\right)$$
$$+M(c_n)+m_nM\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)$$
$$>\frac{1}{2}\Big\{M(b)+M(a_n)+M(c_n)+M(c_n)$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)m_n[M(u_n)+M(v_n)]\Big\}$$
$$>\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)(\rho_M(x^{(n)})+\rho_M(y^{(n)}))=1-\frac{1}{n}\to 1(n\to\infty)$$

即$\|x^{(n)}+y^{(n)}\|\to 2$ $(n\to\infty)$。另一方面

$$M(b)-M(a_n)=m_n(M(u_n)-M(v_n))$$

$$\geq m_n M(u_n - v_n) \geq m_n M(\varepsilon u_n)$$

$$\geq \varepsilon' m_n M(u_n) \geq \varepsilon' \cdot \frac{1}{2}\min\{M(b) - M(a),$$

$$1 - M(b)\} > 0$$

这里 ε' 满足：$M(\varepsilon u) \geq \varepsilon' M(u)$，$(0 \leq u \leq M^{-1}(1))$. 从而 $b - a_n \not\to 0 (n \to \infty)$. 即 $x^{(n)} - y^{(n)} \xrightarrow{W} 0$ $(n \to \infty)$ 是不可能的. 与弱一致凸性相矛盾.定理证毕.

函数空间的 k 一致凸与一致凸等价. 序列空间的 k 一致凸却与 k 密切相关.

定理 4.12 l_M 为 k 一致凸 $(k \geq 1)$ 的充分必要条件是

(1) $M \in \Delta_2$;

(2) $M \in uc\left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)\right]$.

证 必要性 (1) 是不足道的，因 k 一致凸蕴涵自反性. 若 (2) 不真，则有 $\varepsilon > 0, u_n, v_n \in \left[0, M^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)\right], u_n - v_n \geq \varepsilon u_n$ 且

$$M\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{M(u_n) + M(v_n)}{2}$$

$$(n = 1, 2, \cdots) \tag{4.31}$$

记 $w_n = \frac{1}{2k}[(k-1)u_n + (k+1)v_n](n = 1, 2, \cdots)$，则 $M(v_n) < M(w_n) < M(u_n) \leq \frac{1}{k+1}$，从而 $M(u_n) + kM(w_n) < 1$. 取正整数 m_n，使

$$\frac{1}{2} < m_n[M(u_n) + kM(w_n)] \leq 1$$

再取 $t_n \geq 0$，使 $m_n[M(u_n) + kM(w_n)] + M(t_n) = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 置

$$x^{(1,1)} = (\overbrace{w_n w_n \cdots w_n}^{km_n} \overbrace{u_n u_n \cdots u_n}^{m_n} t_n 0 0 \cdots)$$

$$x^{(n,2)}=(\overbrace{u_nu_n\cdots u_n}^{m_n}\ \overbrace{w_nw_n\cdots w_n}^{km_n}t_n oo\cdots)$$

$$x^{(n,3)}=(\overbrace{w_nw_n\cdots w_n}^{m_n}\ \overbrace{u_nu_n\cdots u_n}^{m_n}\ \overbrace{w_n\ w_n\ \cdots\ w_n}^{(k-1)m_n}t_n oo\cdots)$$

$\cdots\cdots$

$$x^{(n,k)}=(\overbrace{w_n\ w_n\cdots\cdots w_n}^{(k-2)m_n}\ \overbrace{u_nu_n\cdots u_n}^{m_n}\ \overbrace{w_nw_n\cdots w_n}^{2m_n}t_n oo)$$

$$x^{(n,k+1)}=(\overbrace{w_n\ w_n\cdots\cdots w_n}^{(k-1)m_n}\ \overbrace{u_nu_n\cdots u_n}^{m_n}\ \overbrace{w_nw_n\cdots w_n}^{m_n}t_n oo\cdots)$$

$(n=1,2,\cdots)$．易见$\rho_M(x^{(n,j)})=m_nM(u_n)+km_nM(w_n)+M(t_n)=1$，因而 $x^{(n,j)}\in S_M(n=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots,k+1)$．又

$$\rho_M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x^{(n,j)}\right)=(k+1)m_nM\left(\frac{u_n+kw_n}{k+1}\right)+M(t_n)$$

$$=(k+1)m_nM\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)+M(t_n)$$

$$>(k+1)m_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}+M(t_n)$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\Big\{m_nM(u_n)+km_n\frac{1}{2k}[(k-1)M(u_n)$$

$$+(k+1)M(v_n)]+M(t_n)\Big\}\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)\{m_nM(u_n)$$

$$+km_nM(w_n)+M(t_n)\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 1\quad(n\to\infty)$$

从而$\left\|\sum_{j=1}^{K+1}x^{(n,j)}\right\|\to k+1\quad(n\to\infty)$．

记 $c_n=\left[m_nM^{-1}\left(\frac{1}{m_n}\right)\right]^{-1}\quad(n=1,2,\cdots)$．置

$$f^{(n,j)}=(\overbrace{o\ o\cdots\cdots\cdots o}^{(j-1)m_n}\ \overbrace{c_nc_n\cdots c_n}^{m_n}oo\cdots)$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

则 $\|f^{(n,j)}\|_N=1$ $(n=1,\ 2,\ \cdots;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$．将这些$\{f^{(n,j)}\}_{j=1}^k$ 代入 Δ_n 的表达式的行列式中去；并将每列减去最

前一列，再按第一行展开，得

$$\Delta_n \geqslant \begin{vmatrix} c_n m_n(u_n - w_n) & & & 0 \\ & c_n m_n(u_n - w_n) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n m_n(u_n - w_n) \end{vmatrix}$$

$$= [c_n m_n (u_n - w_n)]^k = \left[c_n m_n \frac{k+1}{2k}(u_n - v_n)\right]^k$$

$$\geqslant \left[\frac{k+1}{2k} \varepsilon c_n m_n u_n\right]$$

由 (4.31) 式，$m_n(k+1)M(u_n) > \frac{1}{2}$，所以$c_n m_n u_n = u_n / M^{-1}\left(\frac{1}{m_n}\right)$

$\geqslant u_n / M^{-1}(2(k+1)M(u_n)) > \frac{1}{2(k+1)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$。于是

$$\Delta_n \geqslant \left[\frac{k+1}{2k} \varepsilon \frac{1}{2(k+1)}\right]^k = \left(\frac{\varepsilon}{4k}\right)^k$$

与 l_M 的 k 一致凸性相矛盾。

为证充分性，增设如下的引理。

引理 4.8 下述说法等价

(1) $M \in uc[0, a]$；

(2) 对任意的 $u_0 < a$，$b \geqslant a$ 和 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$，使当 $0 \leqslant \min(u, v) \leqslant u_0$，$\max(u, v) \leqslant b$，$|u - v| \geqslant \varepsilon \max(u, v)$ 时

$$M\left(\frac{u+v}{2}\right) \leqslant (1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$$

(3) 对任给整数$m \geqslant 2$，$u_0 < a$，$b \geqslant a$，$\varepsilon > 0$，有$\delta > 0$使当 $0 \leqslant \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} u_j \leqslant u_0$，$\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} u_j \leqslant b$，$\max\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant m} |u_i - u_j| \geqslant \varepsilon \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} u_j$ 时

$$M\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} u_j\right) \leqslant (1-\delta)\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} M(u_j)$$

证 先证 (1) ⇒ (2)。若 (2) 不真，则有 $u_0 < a$，$b \geqslant a$，$\varepsilon > 0$ 和 u_n，$v_n \leqslant b$，$v_n \leqslant u_n$，$u_n - v_n \geqslant \varepsilon u_n > 0$，使 $M\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)$

$>\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{M(u_n)+M(v_n)}{2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$。由（1），当n充分大时必有 $u_n>a$。不妨设 $u_n\to u'$，$v_n\to v'(n\to\infty)$，则 $u'\geqslant a>u_0\geqslant v'$。由 $M(u)$ 凸性和连续性得 $M((u'+v')/2)=((Mu')+M(v'))/2$。这表明 $M(u)$ 在区间〔v'，u'〕上是线性的，与 $M(u)\in uc$〔0，a〕相矛盾。

再证 (2)⇒(3)．对给定的 $u_0<a$，$b\geqslant a$，$\varepsilon>0$，选 δ 使当 u,v 满足（2）的条件时，（2）的结论成立。

对给定的 $m\geqslant 2$ 和满足（3）条件的数组 $\{u_j\}_{j=1}^m$，不妨假定 $u_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}u_j$，$u_2=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}v_j$。

若m为偶数，则

$$M\left(\frac{u_1+u_2+\cdots+u_m}{m}\right)=M\left(\frac{\frac{u_1+u_2}{2}+\cdots+\frac{u_{m-1}+u_m}{2}}{\frac{m}{2}}\right)$$

$$\leqslant\frac{2}{m}\left[M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)+\cdots+M\left(\frac{u_{m-1}+u_m}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{2}{m}\left[(1-\delta)\frac{M(u_1)+M(u_2)}{2}+\frac{M(u_3)+M(u_4)}{2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{M(u_{m-1})+M(u_{m-2})}{2}\right]=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}M(u_j)$$

$$-\frac{\delta}{m}[M(u_1)+M(u_2)]\leqslant\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}M(u_j)-\frac{\delta}{m^2}\sum_{j=1}^{m}M(u_j)$$

$$=\left(1-\frac{\delta}{m}\right)\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}M(u_j)$$

若m为奇数，注意$u_1>\frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{m}u_j>u_2$．

$$M\left(\frac{u_1+\cdots+u_m}{m}\right)=M\left(\frac{u_1+\cdots+u_m+\frac{1}{m}(u_1+\cdots+u_m)}{m+1}\right)$$

$$\leqslant\left(1-\frac{\delta}{m+1}\right)\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{m}M(u_j)+M\left[\frac{1}{m}(u_1+\cdots+u_m)\right]\right\}$$

$$\leqslant\left(1-\frac{\delta}{m+1}\right)\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}M(u_j)$$

最后 (3) 若成立，取$m=2$，$u_0=(1-\varepsilon)a$，$b=a$ 即得(1)。

现在返回到定理4.12的充分性的证明。

设 $x^{(n,1)},x^{(n,2)},\cdots,x^{(n,k+1)}\in S_M(n=1,2,\cdots)$. $\rho_M\left(\sum_{j=1}^{k+1}x^{(n,j)}/k+1\right)\to 1$ $(n\to\infty)$. 对任给的 $\eta>0$，我们将证明 n 足够大时恒有 $\Delta_n=\Delta(x^{(n,1)},\ x^{(n,2)},\ \cdots,\ x^{(n,k+1)})<D\eta$（$D$ 是与 η 无关的正数）。

取 $\varepsilon>0$ 满足

$$(k+1)\varepsilon<1 \tag{4.32}$$

$$\rho_M(x)\leqslant 1,\ \rho_M(y)\leqslant(k+2)\varepsilon\Rightarrow|\rho_M(x+y)-\rho_M(x)|<\eta \tag{4.33}$$

$$\rho_M(x)\leqslant(k+1)\varepsilon\Rightarrow\|x\|<\eta \tag{4.34}$$

取u_0，$0<u_0<M^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)$满足

$$kM(u_0)+M((1+\varepsilon)u_0)>1 \tag{4.35}$$

记

$$I_n=\{i\in I:\max_{j,l}\{|x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,l)}|\}<\varepsilon\max_j|x_i^{(n,j)}|\}$$

$$J_n=\{i\in I:\max_{j,l}\{|x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,l)}|\}\geqslant\varepsilon\max_j\{|x_i^{(n,j)}|\};$$

$x_i^{(n,j)}(j=1,2,\cdots,k+1)$ 不尽同号或$x_i^{(n,j)}$同号 $(j=1,2,\cdots,k+1)$ 但$\min|x_i^{(n,j)}|\leqslant u_0\}$

$$K_n=\{i\in I:\max_{j,l}\{|x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,l)}|\}\geqslant\varepsilon\max_j\{|x_i^{(n,j)}|\};$$

$x_i^{(n,j)}$同号 $(j=1,2,\cdots k+1)$ 且$\max_j|x_i^{(n,j)}|>u_0\}$

$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

由于 $M\in\Delta_2$，对于 $(l_M)^*$ 的单位球中的 f_h，应有 $y^{(h)}\in l_N$，$\|y^{(h)}\|_N\leqslant 1$ 使 $f_h(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i y_i^{(h)}$. 由定理0.21

$$\Delta_n=\sup\left\{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(1)}(x_i^{(n,2)}-x_i^{(n,1)}) & \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(1)}(x_i^{(n,3)}-x_i^{(n,1)})\cdots & \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(1)}(x_i^{(n,k+1)}-x_i^{(n,1)})\\ \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(2)}(x_i^{(n,2)}-x_i^{(n,1)}) & \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(2)}(x_i^{(n,3)}-x_i^{(n,1)})\cdots & \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(2)}(x_i^{(n,k+1)}-x_i^{(n,1)})\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(k)}(x_i^{(n,2)}-x_i^{(n,1)}) & \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(k)}(x_i^{(n,3)}-x_i^{(n,1)})\cdots & \sum_{i=1}^{\infty}y_i^{(k)}(x_i^{(n,k+1)}-x_i^{(n,1)})\end{vmatrix}:\|y^{(j)}\|_N\leqslant 1\ (j=1,2,\cdots k)\right\}$$

$$=\sup\left\{\begin{vmatrix}(\sum_{i\in I_n}+\sum_{i\in J_n}+\sum_{i\in K_n})y_i^{(1)}(x_i^{(n,2)}-x_i^{(n,1)})\cdots & (\sum_{i\in I_n}+\sum_{i\in J_n}+\sum_{i\in K_n})y_i^{(1)}(x_i^{(n,k+1)}-x_i^{(n,1)})\\ \cdots\qquad\cdots & \\ (\sum_{i\in I_n}+\sum_{i\in J_n}+\sum_{i\in K_n})y_i^{(k)}(x_i^{(n,2)}-x_i^{(n,1)})\cdots & (\sum_{i\in I_n}+\sum_{i\in J_n}+\sum_{i\in K_n})y_i^{(k)}(x_i^{(n,k+1)}-x_i^{(n,1)})\end{vmatrix}:\|y^{(j)}\|_N\leqslant 1\ (j=1,2,\cdots k)\right\}$$

$$\tag{4.36}$$

将右方行列式按每列已分解成三列的形式展开为 3^k 个 k 阶行列式．将这些行列式划分为三类：第一类，行列式中至少有一列为 $\sum_{I_n}$ 型；第二类，行列式中没有 $\sum_{I_n}$ 型列，但至少有一列为 $\sum_{J_n}$ 型；第三类，行列式均由 $\sum_{K_n}$ 型列组成．易知三类行列式的个数分别是 3^k-2^k，2^k-1和 1．

首先，讨论第一类行列式 Δ_n'．

以 e^i 记 $(0\cdots 0\overset{i}{1}00\cdots)$ 并注意到 $\left|\sum_{i=1}^{\infty} y_i^{(h)}(x_i^{(n,l)}-x_i^{(n,1)})\right|$
$\leqslant \|y^{(h)}\|_{N(\cdot)}\|x^{(n,l)}-x^{(n,1)}\|_{(\cdot)}\leqslant 2 \quad (h=1,2,\cdots k;\ l=1,2,\cdots,k+1)$

$$
\Delta_n' = \begin{vmatrix} \cdots\sum_{I_n} y_i^{(1)}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})\cdots \\ \cdots\sum_{I_n} y_i^{(2)}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\sum_{I_n} y_i^{(k)}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})\cdots \end{vmatrix} \leqslant k!2^{k-1}\left\|\sum_{I_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i\right\| \quad (4.37)
$$

由于 (4.32) 和 I_n 的取法有

$$
\begin{aligned}
\rho_N\left[\sum_{I_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i\right] &= \sum_{I_n} M(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)}) \\
&\leqslant \sum_{I_n} M[\varepsilon(|x_i^{(n,1)}|+|x_i^{(n,2)}|+\cdots+|x_i^{(n,k+1)}|)] \\
&\leqslant (k+1)\varepsilon\sum_{I_n} M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}|x_i^{(n,j)}|\right) \\
&\leqslant (k+1)\varepsilon\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=1}^{\infty} M(x_i^{(n,j)}) = (k+1)\varepsilon
\end{aligned}
$$

由 (4.34), $\left\|\sum_{I_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i\right\|<\eta$. 从而由 (4.37), 第一类行列式总和

$$
\sum\Delta_n' < (3^k-2^k)k!2^{k-1}\eta \quad (n=1,2,\cdots) \tag{4.38}
$$

其次，讨论第二类行列式Δ_n''.同样有

$$
\Delta_n'' \leqslant k!2^{k-1}\left\|\sum_{I_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i\right\|
$$

当$x_i^{(n,j)}(j=1,2,\cdots k+1)$同号且 $\min_j |x_i^{(n,j)}|\leqslant u_0$ 时，由充分性假设并注意到 $|x_i^{(n,j)}|\leqslant M^{-1}(1)$ $(n=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots k+1)$ 联系引理4.8之 (3)，存在 $\delta>0$，使

$$
M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_i^{(n,j)}\right)\leqslant(1-\delta)\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}M(x_i^{(n,j)})
$$
$$
(i\in J_n, n=1,2,\cdots) \tag{4.39}
$$

若 $x_i^{(n,j)}$不尽同号，不妨设 $x_i^{(n,1)},\cdots,x_i^{(n,p)}$同号，$x_i^{(n,p+1)}$ $x_i^{(n,k+1)}$ 同号且 $\sum_{j=1}^{p}|x_i^{(n,j)}| \geqslant \sum_{j=p+1}^{k+1}|x_i^{(n,j)}|$. 考虑$k+1$个数

$$x_i^{(n,1)}\cdots x_i^{(n,p)}\overbrace{0\ \ 0\cdots 0\ \ 0}^{k+1-p}$$

显然，$\max_{j,l}\{|x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,l)}|\}=\max_{j}\{|x_i^{(n,j)}|\}$，而 $\min_{j}\{|x_i^{(n,j)}|\}=0<u_0$。

对这样一组 $(k+1)$ 个同号数，仍由引理 4.8，有$\delta>0$使 $M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{p}x_i^{(n,j)}\right)\leqslant(1-\delta)\ \frac{1}{k+1}\sum_{k+1}^{p}M(x_i^{(n,j)})$. 于是

$$M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_i^{(n,j)}\right)<M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{p}x_i^{(n,j)}\right)$$

$$\leqslant(1-\delta)\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{p}M(x_i^{(n,j)})$$

$$\leqslant(1-\delta)\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}M(x_i^{(n,j)}) \tag{4.40}$$

现在证明 $\rho_M(\sum_{J_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i)\to0(n\to\infty)$.如不然，则有子列，仍用原记号，满足 $\sum_{J_n}M(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})\geqslant\sigma>0$ $(n=1,2,\cdots)$. 由 $M\in\Delta_2$，有$c>0$，满足$\sum_{J_n}M\left(\frac{x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)}}{2}\right)$ $\geqslant\frac{\sigma}{c}$ $(n=1,2,\cdots)\leqslant(1-\delta)$. 于是

$$0\leftarrow1-\sum_{i=1}^{\infty}M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_i^{(n,j)}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}M(x_i^{(n,j)})\right.$$

$$\left.-M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_i^{(n,j)}\right)\right]\geqslant\sum_{J_n}\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}M(x_i^{(n,j)})\right.$$

$$\left.-M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_i^{(n,j)}\right)\right]>\delta\sum_{J_n}\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}M(x_i^{(n,j)})\right]$$

$$>\frac{\delta}{k+1}\sum_{i\in J_n}M\left(\frac{x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)}}{2}\right)\geq\frac{\delta\sigma}{(k+1)c}$$

这一矛盾肯定了 $\rho_M(\sum_{J_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i)\to 0(n\to\infty)$. 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\sum_{J_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e_i\|=0$. 即存在 N_0，$n\geq N_0$ 时，恒有 $\|\sum_{J_n}(x_i^{(n,j)}-x_i^{(n,1)})e^i\|<\eta$. 于是第二类行列式总和

$$\sum\Delta_n''\leqslant(2^k-1)k!2^{k-1}\eta\quad(n\geq N_0)\tag{4.41}$$

最后讨论第三类行列式 Δ_n'''（只有一个）分以下几个步骤。

1. K_n 中自然数个数不超过 k 个。若有（$k+1$）个，不妨设为 $K_n=\{1,2,\cdots,k+1\}$，$x_1^{(n,1)}=\max\limits_j|x_1^{(n,j)}|$，$x_1^{(n,2)}=\min\limits_j|x_1^{(n,j)}|$，$x_1^{(n,1)}>x_1^{(n,2)}\geq u_0$. 从 $x_1^{(n,1)}-x_1^{(n,2)}\geq\varepsilon x_1^{(n,1)}$ 知 $x_1^{(n,1)}>(1+\varepsilon)u_0$. 由（4.35）

$$\begin{aligned}\rho_M(x^{(n,1)})&\geq M(x_1^{(n,1)})+M(x_2^{(n,1)})+\cdots+M(x_{k+1}^{(n,1)})\\&>M((1+\varepsilon)u_0)+kM(u_0)>1\end{aligned}$$

这一矛盾证得 K_n 中至多有 K 个数。设 $K_n=\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$

$$\Delta_n'''=\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^k y_{n_i}^{(1)}(x_{n_i}^{(n,2)}-x_{n_i}^{(n,1)})\cdots & \sum\limits_{i=1}^k y_{n_i}^{(k)}(x_{n_i}^{(n,k+1)}-x_{n_i}^{(n,1)})\\ \cdots\quad\cdots & \cdots\cdots\\ \sum\limits_{i=1}^k y_{n_i}^{(k)}(x_{n_i}^{(n,2)}-x_{n_i}^{(n,1)})\cdots & \sum\limits_{i=1}^k y_{n_i}^{(1)}(x_{n_i}^{(n,k+1)}-x_{n_i}^{(n,1)})\end{vmatrix}\tag{4.42}$$

2. $\left\{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_i}^{(n,j)}\right\}_{j=1}^{k+1}$ 在 $M(u)$ 图形的同一直线段上（$i=1,2,\cdots,k$）.

由以上两段已获结果知有 N_1，当 $n\geq N_1$ 时总有

$\sum_{I_n \cup J_n} M(x_i^{(n,j)} - x_i^{(n,1)}) < (k+2)\varepsilon (j=1,2,\cdots k+1)$. 由(4.33)式

$$\left|\sum_{I_n \cup J_n} M(x_i^{(n,j)}) - \sum_{I_n \cup J_n} M(x_i^{(n,1)})\right| < \eta \quad (j=1, 2, \cdots, k+1;\ n \geqslant N_1)$$

鉴于 $(\sum_{I_n \cup J_n} + \sum_{K_n}) M(x_i^{(n,j)}) = 1 = (\sum_{I_n \cup J_n} + \sum_{K_n})(x_i^{(n,1)})$ $(j=1, 2, \cdots, k+1)$, 故 $|\sum_{K_n} M(x_i^{(n,j)}) - \sum_{K_n} M(x_i^{(n,j)})| < \eta$或写作

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(M(x_{n_i}^{(n,j)}) - M(x_{n_i}^{(n,1)}))\right| < \eta$$

$$(n \geqslant N_1; j=1,2,\cdots,k+1) \tag{4.43}$$

对固定的 i, j, 取 $\{x_{n_i}^{(n,j)}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列，仍用原记号，使 $\lim_{n\to\infty} x_{n_i}^{(n,j)} = a_i^j (j=1,2,\cdots,k+1; i=1, 2, \cdots, k)$. 由 (4.43) 式令$n \to \infty$得

$$\left|\sum_{i=1}^{k}(M(a_i^j) - M(a_i^1))\right| < \eta (j=1,2,\cdots,k+1) \tag{4.44}$$

另一方面注意到

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} M(x_{n_i}^{(n,j)}) - M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} x_{n_i}^{(n,j)}\right)$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} M(x_t^{(n,j)}) - M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} x_t^{(n,j)}\right)\right]$$

$$= 1 - \rho_M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} x^{(n,j)}\right) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad (i=1,2,\cdots k)$$

是一致成立的，故

$$\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} M(a_i^j) - M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} a_i^j\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{k+1}\left|\sum_{j=1}^{k+1}[M(a_i^j) - M(x_{n_i}^{(n,j)})]\right|$$

$$+\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} M(x_{n_i}^{(n,j)}) - M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} x_{n_i}^{(n,j)}\right)\right]$$

$$+\left|M\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}x_{n\ i}^{(n,j)}\right]-M\left[\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}a_i{}^j\right]\right|$$

$$\to 0\quad(n\to\infty)\quad(i=1,2,\cdots,\ k)$$

即$\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}M(a_i{}^j)=M\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}a_i{}^j\right)$。这表明，对每一固定的 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，$a_i{}^1,a_i{}^2,\cdots,a_i{}^{k+1}$ 在$M(u)$ 的同一线性区间之内。设此时 $M(u)=p_iu+q_i(\ i=1,2,\cdots,k\ )$，则$M(a_i{}^j)=p_ia_i{}^j+q_i$ $(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots k+1)$。以此代入（4.44）式

$$|\zeta_j|\triangleq\left|\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i{}^j-a_i{}^1)\right|<\eta\quad(j=1,2,\cdots,\ k+1)\tag{4.45}$$

这里$\zeta_j=\sum_{i=1}^{k}p_i(a_i{}^j-a_i{}^1)$ $(j=1,2,\cdots,k+1)$。于是

$$a_1{}^j-a_1{}^1=\frac{1}{p_1}\zeta_j-\frac{1}{p_1}\sum_{i=2}^{k}p_i(a_i{}^j-a_i{}^1)$$

$$(j=2,3,\cdots,k+1)\tag{4.46}$$

3. 完成定理证明。回到（4.42）式（注意此时已经取了子列），有N_2，当 $n>N_2$ 时有

$$\Delta_n'''\leqslant\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{k}y_{n\ i}^{(1)}(a_i{}^2-a_i{}^1)\cdots & \sum_{i=1}^{k}y_{n\ i}^{(1)}(a_i{}^{k+1}-a_i{}^1)\\ \cdots & \cdots\\ \sum_{i=1}^{k}y_{n\ i}^{(k)}(a_i{}^2-a_i{}^1)\cdots & \sum_{i=1}^{k}y_{n\ i}^{(k)}(a_i{}^{k+1}-a_i{}^1)\end{vmatrix}+\eta$$

记 $p=\sum_{i=2}^{k}\left(1+\frac{p_i}{p_1}\right)$，将代入上式并估算之，联系（4.45）式

$$\Delta_n'''\leqslant\begin{vmatrix}\sum_{i=2}^{k}\left(y_{n\ i}^{(1)}-\frac{p_i}{p_1}y_{n\ 1}^{(1)}\right)(a_i{}^2-a_i{}^1)+\frac{y_{n\ 1}^{(1)}}{p_1}\zeta_2\cdots\\ \cdots\quad\cdots\\ \sum_{i=2}^{k}\left(y_{n\ i}^{(k)}-\frac{p_i}{p_1}y_{n\ 1}^{(k)}\right)(a_i{}^2-a_i{}^1)+\frac{y_{n\ 1}^{(k)}}{p_1}\zeta_2\cdots\end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\sum_{i=2}^{k}\left(y^{(1)}_{n_i}-\frac{p_i}{p_1}y^{(1)}_{n_i}\right)(a_i^{k+1}-a_i^{1})+\frac{y^{(1)}_{n_1}}{p_1}\zeta_{k+1} \\
\\
\sum_{i=2}^{k}\left(y^{(k)}_{n_i}-\frac{p_i}{p_1}y^{(k)}_{n_i}\right)(a_i^{k+1}-a_i^{1})+\frac{y^{(k)}_{n_1}}{p_1}\zeta_{k+1}
\end{vmatrix}+\eta
$$

$$
\leqslant\begin{vmatrix}
\sum_{i=2}^{k}\left(y^{(1)}_{n_i}-\frac{p_i}{p_1}y^{(1)}_{n_1}\right)(a_i^{2}-a_i^{1})\cdots \\
\cdots\quad\cdots \\
\sum_{i=2}^{k}\left(y^{(k)}_{n_i}-\frac{p_i}{p_1}y^{(k)}_{n_i}\right)(a_i^{2}-a_i^{1})\cdots
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
\sum_{i=2}^{k}\left(y^{(1)}_{n_i}-\frac{p_i}{p_1}y^{(1)}_{n_1}\right)(a_i^{k+1}-a_i^{1}) \\
\\
\sum_{i=2}^{k}\left(y^{(k)}_{n_i}-\frac{p_i}{p_1}y^{(k)}_{n_1}\right)(a_i^{k+1}-a_i^{1})
\end{vmatrix}
$$

$$
+2^{k}k!(kpN^{-1}(1)M^{-1}(1))^{k-1}\cdot\frac{N^{-1}(1)}{p_1}\eta \qquad (4.47)
$$

注意到 $u_0\leqslant\min\{a_i^{1},a_i^{2},\cdots,a_i^{k+1}\}<\max\{a_i^{1},a_i^{2},\cdots,a_i^{k+1}\}\leqslant M^{-1}(1)$ ($i=1,2,\cdots k$)。所以 $\min\limits_{a_0\leqslant u\leqslant M^{-1}(1)} M'(u)\leqslant p_i\leqslant\max\limits_{u_0\leqslant u\leqslant M^{-1}(1)} M'(u)$ ($i=1,2,\cdots$)。因此可以认为不等式(4.47)中的 $p=\sum_{i=2}^{k}\left(1+\frac{p_i}{p_1}\right)$和 p_1 是与(4.44)式之前的子列的选择无关的。

将(4.47)式右方行列式分解成 $(k-1)^{k-1}$ 个 k 阶行列式，每一个都形如

$$
\begin{vmatrix}
\left(y^{(1)}_{n_{s_1}}-\frac{p_{s_1}}{p}y^{(1)}_{n_1}\right)(a^{2}_{s_1}-a^{1}_{s_1}) & \cdots & \left(y^{(1)}_{n_{s_k}}-\frac{p_{s_k}}{p_1}y^{(1)}_{n_1}\right)(a^{k+1}_{s_1}-a^{1}_{s_1}) \\
\cdots & \cdots & \\
\left(y^{(k)}_{n_{s_1}}-\frac{p_{s_1}}{p_1}y^{(k)}_{n_1}\right)(a^{2}_{s_1}-a^{1}_{s_1}) & \cdots & \left(y^{(k)}_{n_{s_k}}-\frac{p_{s_k}}{p_1}y^{(k)}_{n_1}\right)(a^{k+1}_{s_1}-a^{1}_{s_1})
\end{vmatrix}
$$

由于 $s_1,s_2,\cdots,s_k\in\{2,3,\cdots,k\}$，这个 k 阶行列式至少有两列是成比例的，故其值为零. 从而 (4.47) 式化为

$$\Delta_n''' \leqslant 2^k k!(kpN^{-1}(1)M^{-1}(1))^{k-1}\frac{N^{-1}(1)}{p_1}\eta \qquad (4.48)$$

综合 (4.38)、(4.41)和 (4.48) 式，当 n 足够大时

$$\Delta_n < \Big[(3^k-2^k)k!2^{k-1}+(2^{k-1}-1)k!2^{k-1} + 2^k k!(kpN^{-1}(1)M^{-1}(1))^{k-1}\frac{N^{-1}(1)}{p_1'}\Big]\eta$$

即证实了 $\lim_{n\to\infty}\Delta_n=0$. 定理证毕.

附记 §1 中内容全部取自 J.Lindenstrauss 和 L.Tzafriri 的[2—5].

§2 中的引理 4.3、4.4 和定理 4.5 属于叶以宁[7]；引理 4.5 和定理 4.7 取自王廷辅[8]. 表征数 d_2 先由叶以宁给出[7]，王廷辅[3] 推广为 d_n 并证明了引理 4.6 和定理 4.6. 定理 4.8 综合了王廷辅、叶以宁和李岩红[10—13] 的有关结果. 关于空间 $(l_M, \|\cdot\|_M)$，其装球常数的表达式以及与自反性的关系也由王廷辅等找到[14, 15]；而其一致非方性、局部一致非方性以及平坦性，则由吴从炘、陈述涛、王玉文[16] 给出判据.

§ 3 中各命题来源已如节首的表中所列. 此外，在 Orlicz序列空间理论研究中，王作强[24]、陈述涛和申亚权[25]，分别给出端点判据；崔云安、王廷辅[22]给出强端点的判据；陶良德[21]给出光滑和各向一致凸的充要条件.

参 考 文 献

〔1〕 K. Lindberg, On Subspaces of Orlicz Sequence Spaces, Studia Math., 45(1973),119—146.

〔2〕 J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, On Orlicz Sequence Spaces, Israel J. Math., 10(1971),379—390.

〔3〕 ——,——. On Orlicz Sequence Spaces Ⅱ, Israel

J. Math., 11(1972),355—379.

〔4〕 ——, ——, On Orlicz Sequence Spaces Ⅲ, Israel J. Math., 14(1973),368—389.

〔5〕 ——, ——, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag(1977).

〔6〕 К.П.Кирчев,С. Л. Троянский, Serdica,1(1975), 88—95.

〔7〕 叶以宁，Orlicz 序列空间的装球临界值，数学年刊，4A(1983),487—493；科学探索，2(1982), no.1, 77—80.

〔8〕 王廷辅,Orlicz 序列空间的 Girth 与自反性,数学年刊，6A (1985), 567—574,自然杂志，7 (1984), 713—714.

〔9〕 ——，Orlicz 序列空间的表征数 d_n （待发表）.

〔10〕 ——，Orlicz 空间一致非 $l_n^{(1)}$ 的条件，科学探索，5 (1985), no.1, 125—126.

〔11〕 ——，石中锐，Orlicz 空间的 NUC 和 UKK 性质（待发表）.

〔12〕 叶以宁、李岩红，Orlicz 序列空间的一致非方与装球，数学研究与评论，5(1985), no.4,123—126.

〔13〕 ——，——，Orlicz 空间的自反性，东北数学（待发表）.

〔14〕 王廷辅，Orlicz 序列空间的装球常数，数学年刊（将发表）.

〔15〕 ——，崔云安，李岩红，Orlicz 序列空间的自反性与装球常数，数学进展，15(1986),no.2, 217—218.

〔16〕 吴从炘、陈述涛、王玉文，Orlicz 序列空间自反性的几何特征与平坦性，东北数学，2(1986).no.1.

〔17〕 A. Kaminska, On Uniformly Convex Orlicz Spaces, Indag.Math., A 85(1)(1982),27—36.

〔18〕 王廷辅，Orlicz 序列空间一致凸的条件，哈尔滨科技大学学报，(1983)，no.2,1—8.

〔19〕 ——，陈述涛，Orlicz 序列空间的 k 一致凸，（待发表）.

〔20〕 李岩红，Orlicz 序列空间的弱一致凸，自然杂志（待发表）.

〔21〕 陶良德，Orlicz 序列空间的若干凸性和光滑性（待发表）.

〔22〕 崔云安、王廷辅，Orlicz 空间的强端点和中点局部一致凸（待发表）.

〔23〕 吴从炘、陈述涛、王玉文，Orlicz 序列空间的 H 性质，哈尔滨工业大学学报，(1985)，数学增刊.

〔24〕 王作强，Orlicz 序列空间的端点，大庆石油学院学报，(1983)，no.1，112—121.

〔25〕 陈述涛、申亚权，Orlicz 空间的端点与严格凸，哈尔滨师范大学学报，(1985)，no.2,1—6.

〔26〕 ——，——，Orlicz 序列空间的局部一致凸性，哈尔滨师范大学学报，(1985)，no.2,1—5.

〔27〕 王廷辅，石中锐，Orlicz 序列空间的 k 一致凸（待发表）.

第五章　广义 Orlicz 空间几何

根据各种不同的理论和应用的需要，Orlicz 空间有各种不同形式的推广。本章介绍两种由含参量的 Young 函数生成的矢值 Orlicz 空间，然后讨论这类空间的端点、严格凸性和一致凸性。

§1　矢值 Orlicz 空间

设T为无原子测度空间，E^n为n维欧氏空间。

定义 5.1　$T\times E^n$上的实值非负函数$M(t,x)$称为广义N函数（GN函数），如果它满足

(1)　对所有$t\in T$，$x\in E^n$，$M(t,x)=0$当且仅当$x=0$；

(2)　对每个$t\in T$，$M(t,x)$是x的偶的连续凸函数；对每个$x\in E^n$，$M(t,x)$是t的可测函数；

(3)　对每个$t\in T$，$\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{M(t,x)}{|x|}=\infty$；

(4)　存在常数$L\geqslant 1$使得$|x|\leqslant|y|$时成立

$$M(t,x)\leqslant LM(t,y)\qquad(t\in T)\tag{5.1}$$

引入记号

$$\overline{M}(t,c)=\sup_{|x|=c}M(t,x);\quad \underline{M}(t,c)=\inf_{|x|=c}M(t,x)$$

不难验证，当$M(t,x)$是GN函数时，$\overline{M}(t,c)$是$T\times R$上的GN函数，但一般$\underline{M}(t,c)$不是GN函数。

定义 5.2　我们称GN函数$M(t,x)$满足Δ条件，如果存在常数$K\geqslant 2$和T上非负可测函数$\delta(t)$使得$\int_T\overline{M}(t,2\delta(t))dt<\infty$且对

几乎所有$t\in T$和所有$x\in E^n$，只要$|x|\geqslant\delta(t)$，就有

$$M(t,2x)\leqslant KM(t,x)$$

我们用X表示形如 $x=x(t)=(x^{(k)}(t))_{k=1}^n$ 的矢值函数的全体，其中$x(t)$的每个分量 $x^{(k)}(t)$都是T上的可测实值函数。X中的元素相等系指它们几乎处处相等。对于$x\in X$，规定它的模为

$$\rho_M(x)=\int_T M(t,x(t))dt$$

Orlicz类L_M和Orlicz空间L_M^*的定义方法与第一章相同。L_M^*中元素x的范数为 Luxemburg 范数

$$\|x\|=\inf\{k>0:\rho_M\left(\frac{x}{k}\right)\leqslant 1\}$$

同样可以验证，$(L_M^*,\|\cdot\|)$ 是 Banach空间。

对 $p>1$，$b>1$和$t\in T$，令

$$E_t=\{x\in E^n:M(t,bx)>pM(t,x)\}$$

然后定义 $h_{p,b}(t)=\sup\limits_{x\in E_t}|x|$，这里规定当$E_t$为空集或无界集时$\sup|x|$为0或$\infty$。

引理 5.1 存在X中点列$\{z_k(t)\}$使得

$$|z_k(t)|\uparrow_k h_{p,b}(t)\quad (t\in T);$$

$$M(t,bz_k(t))>pM(t,z_k(t))\quad (z_k(t)\neq 0)$$

$(k=1,2,\cdots)$,因此，$h_{p,b}(t)$是T上可测函数。

证 任取E^n的一个可数稠集$\{r_1,r_2,\cdots\}$。对每个自然数i，记

$$r_i(t)=\begin{cases}r_i, & \text{当 } M(t,br_i)>pM(t,r_i) \text{ 时}\\ 0, & \text{其他处}\end{cases}$$

再定义 $z_1(t)=r_1(t)$

$$z_{k+1}(t)=\begin{cases}r_{k+1}(t), & \text{当 } |r_{k+1}(t)|>|z_k(t)| \text{ 时}\\ z_k(t), & \text{其他处}\end{cases}$$

$(k=1,2,\cdots)$。我们只需验证$\lim\limits_{k\to\infty}|z_k(t)|\geqslant h_{p,b}(t)$便知引理结论正确。

对每个$t\in T$，若 $h_{p,b}(t)=0$，则显然对所有k有 $z_k(t)=0$。若$h_{p,b}(t)\neq 0$，那么存在$u_k\in E^n$使$|u_k|\uparrow_k h_{p,b}(t)$ 且 $M(t,bu_k)>$

$pM(t,u_k)$ $(k=1,2,\cdots)$．对每个k，由$M(t,u)$的连续性及$\{r_i\}$的稠性，存在充分接近u_k的点$r_{i_k}\in\{r_i\}$使得$M(t,br_{i_k})>pM(t,r_{i_k})$且$|r_{i_k}|\geqslant|u_k|$。于是由$\{z_k(t)\}$的定义，当$n>i_k$时有$|z_n(t)|\geqslant|r_{i_k}|\geqslant|u_k|$。因而$\lim\limits_{k\to\infty}|z_k(t)|\geqslant h_{p,b}(t)$。

引理 5.2 如果$\overline{M}(t,h_{p,b}(t))$在$T$的某个可测子集$E$上$a\cdot e\cdot$有限且不可积，则对任何$c\geqslant 0$，存在某$z_{k_0}(t)$满足引理5.1的条件及$e\subset E(z_{k_0}(t)\neq 0)$使得

$$\int_e M(t,z_{k_0}(t))dt=c;\quad \int_e \overline{M}(t,h_{p,b}(t))dt<\infty$$

证 因$\overline{M}(t,c)$也是GN函数，由（5.1）式和引理5.1

$$\infty=\int_E \overline{M}(t,h_{p,b}(t))dt=\lim_{k\to\infty}\int_E \overline{M}(t,|z_k(t)|)dt$$

$$\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_E LM(t,z_k(t))dt$$

因此k_0充分大时必有$\int_E M(t,z_{k_0}(t))dt>c$。再由$T$的无原子性和$\overline{M}(t,h_{p,b}(t))$的$a.e.$有限性，容易选出满足引理条件的$e$。

定理 5.1 下列说法等价

(1) $M(t,u)$不满足Δ条件；

(2) 对任何$p>1$，$b>1$，$\overline{M}(t,h_{p,b}(t))$于$T$上不可积；

(3) 设有数列$\{b_n\}$，$\{p_n\}$和$\{q_n\}$，其中$\{b_n\}$非增；$\{p_n\}$非减，$b_n>1$，$p_n>1$，$q_n\geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$．那么存在X中点列$\{x_n\}$和T中两两不交子集列$\{e_n\}$使得对所有n，$\int_{e_n} M(t,x_n(t))dt=q_n$且

$$M(t,b_{k_n}x_n(t))>p_{k_n}M(t,x_n(t))\quad (t\in e_n)$$

这里$\{k_n\}$是自然数列的一个子列；

(4) 对任何$\varepsilon\in(0,1)$，存在$u_0\in L_M{}^*$，$\|u_0\|=1$，$\rho_M(u_0)=\varepsilon$；

(5) 存在$u_0 \in L_M^*$，$\|u_0\| = 1$，$\rho_M(u_0) < 1$。

证 (1)⇒(2)。若不然，则存在 p，$b > 1$ 使$\overline{M}(t, h_{p,b}(t))$于$T$上可积。选自然数$k$使$b^k > 2$，注意由$h_{p,b}(t)$的定义，$|u| \geq h_{p,b}(t)$时$M(t, bu) \leq pM(t, u)$，便知

$$\int_T \overline{M}(t, 2h_{p,b}(t))dt \leq \int_T \overline{M}(t, b^k h_{p,b}(t))dt \leq$$

$$p^k \int_T \overline{M}(t, h_{p,b}(t))dt < \infty$$

又对任何$x \in E^n$，$t \in T$，$|x| \geq h_{p,b}(t)$时

$$M(t, 2x) \leq M(t, b^k x) \leq p^k M(t, x)$$

与(1)不符。

(2)⇒(3) 对每个自然数n，由引理5.1，存在X中点列$\{z_{n,k}(t)\}_k$使得$|z_{n,k}(t)| \uparrow_k h_{p_n, b_n}(t) \triangleq h_n(t)$且

$$M(t, b_n z_{n,k}(t)) > p_n M(t, z_{n,k}(t)) \quad (z_{n,k}(t) \neq 0)$$

$(k = 1, 2, \cdots)$。显然$\{h_n(t)\}$非增，记$T_n = T(h_n(t) = \infty)$，则$\{T_n\}$单调非增，以下分三种情形讨论。

(一) $\mathrm{mes}(\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n) > 0$。此时可选$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$的一列两两不交正测度子集$\{E_n\}$。因在$E_n$上$k \to \infty$时$z_{n,k}(t) \to \infty$，存在$k_n$使得$\int_{E_n} M(t, z_{n,k_n}(t))dt > q_n$。于是存在$e_n \subset E_n (z_{n,k_n}(t) \neq 0)$使得$\int_{e_n} M(t, z_{n,k_n}(t))dt = q_n$。从而此时可令$x_n(t) = z_{n,k_n}(t)$。

(二) $\mathrm{mes}(\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n) = 0$，但对所有$n$有$\mathrm{mes}T_n > 0$。此时必存在自然数列的子列$\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$使得$\mathrm{mes}(T_{n_j} - T_{n_{j+1}}) > 0$。以不交子集列$\{T_{n_j} - T_{n_{j+1}}\}_{j=1}^{\infty}$代替(一)中$\{E_{n_j}\}$，仿照情形(一)即可得到需要的$\{e_j\}$和$\{x_j\}$。

(三) 若(一)和(二)均不成立，则i充分大时有$\mathrm{mes}T_i = 0$。不妨设此式对所有自然数i成立，即$\overline{M}(t, h_i(t))$于T上a.e.有限$(i = 1, 2, \cdots)$。由引理5.2，存在自然数k_1和$e_1 \subset T$

$(z_{1,k_1}(t)\neq 0)$使

$$\int_{e_1}\mathrm{M}(t,z_{1,k_1}(t))dt=q_1;\int_{e_1}\overline{\mathrm{M}}(t,h_1(t))dt<\infty$$

从而$\int_{T\setminus e_1}\overline{\mathrm{M}}(t,h_2(t))dt\geqslant\int_T\overline{\mathrm{M}}(t,h_2(t))dt-\int_{e_1}\overline{\mathrm{M}}(t,h_1(t))dt=\infty$。于是同样可得某$k_2>k_1$和$e_2\subset(T\setminus e_1)(z_{2,k_2}(t)\neq 0)$使得

$$\int_{e_2}\mathrm{M}(t,z_{2,k_2}(t))dt=q_2;\int_{e_2}\overline{\mathrm{M}}(t,h_2(t))dt<\infty$$

如此下去，便得到所需的$\{e_n\}$和$\{x_n(t)\}=\{z_{n,k_n}(t)\}$。

(3) $\Rightarrow$ (4) 置 $b_n=1+\dfrac{1}{n}$，$p_n=2^n$，$q_n=\dfrac{\varepsilon}{2^n}(n=1,2,\cdots)$，取定 (3) 中的$\{x_n\}$和$\{e_n\}$。定义

$$u_0(t)=\begin{cases}x_n(t), & t\in e_n, \ n=1, \ 2, \ \cdots\\ 0, & 其他处\end{cases}$$

那么由(3)

$$\rho_M(u_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e_n}M(t,x_n(t))dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

故 $\|u_0\|\leqslant 1$。但另一方面，对任何正数 $L<1$，存在 $m\geqslant 1$ 使得 $1+\dfrac{1}{m}\leqslant\dfrac{1}{L}$，于是仍由 (3)

$$\int_T M\left(t,\frac{u_0(t)}{L}\right)dt\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}\int_{e_n}\mathrm{M}(t,b_{k_n}x_n(t))dt>\sum_{n=m}^{\infty}\frac{2^{k_n}\varepsilon}{2^n}=\infty$$

因而由$\|\cdot\|$的定义，$\|u_0\|=1$。

(4) $\Rightarrow$ (5) 显然。

(5) $\Rightarrow$ (1) 与第一章相应部分相同。

定理 5.2 L_M为线性集的充要条件是$\mathrm{M}(t,u)$满足Δ条件。

证 与第一章相应定理雷同。

定理 5.3 $L_M{}^*$ 中模收敛与范数收敛等价的充要条件是$\mathrm{M}(t,u)$满足Δ条件。

证 必要性由定理5.1的 (4) 即可证明。今证充分性。显然范数收敛总蕴涵模收敛. 往证相反情形。设$\rho_M(u_n)\to 0$ $(n\to\infty)$。由Δ条件，存在常数$K\geqslant 2$和非负函数 $\delta(t)$ 满足$\int_T\overline{\mathrm{M}}(t,2\delta(t))dt$

<∞ 且对几乎所有 $t\in T$，只要 $|x|\geqslant\delta(t)$，就有 $M(t,2x)\leqslant KM(t,x)$。

对任给$\varepsilon>0$，选自然数m使 $2^m\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$，那么

$$\int_T\overline{M}(t,\frac{1}{\varepsilon}\delta(t))dt\leqslant K^m\int_T\overline{M}(t,\delta(t))dt<\infty$$

记 $T_n=\{t\in T:|u_n(t)|\leqslant\delta(t)\}$，$y_n(t)=u_n(t)\chi_{T_n}(t)$，则在 T 上处处有 $|y_n(t)|\leqslant\delta(t)$ $(n=1,2,\cdots)$。又 $\rho_M(u_n)\to 0$ 蕴涵 $M(t,y_n(t))\xrightarrow{\mu}0$ $(n\to\infty)$，由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_T M(t,\frac{1}{\varepsilon}y_n(t))dt=0$$

于是存在N_1使得 $n>N_1$ 时$\int_T M(t,\frac{1}{\varepsilon}y_nt))dt<\frac{1}{2}$。

再取N_2使$n>N_2$时$\rho_M(u_n)<\frac{1}{2K^m}$，则$n>\max(N_1,N_2)$时

$$\rho_M\left(\frac{1}{\varepsilon}u_n\right)\leqslant\int_{T_n}M(t,\frac{1}{\varepsilon}y_n(t))dt+\int_{T\setminus T_n}M(t,2^mu_n(t))dt$$

$$<\frac{1}{2}+K^m\int_{T\setminus T_n}M(t,u_n(t))dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}+K^m\rho_M(u_n)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

这表明n充分大时$\|u_n\|\leqslant\varepsilon$，定理得证。

§2 端点与严格凸

我们称$x\in E^n$是GN函数 $M(t,u)$ 关于$t\in T$的一个非严格凸点，如果存在 $y,z\in E^n$，$y\neq z$，$x=\frac{y+z}{2}$使得

$$M(t,x)=\frac{1}{2}M(t,y)+\frac{1}{2}M(t,z)\tag{5.3}$$

$M(t, u)$关于t的非严格凸点全体记为K_t，当$K_t=\phi$时称$M(t, u)$是严格凸的，使得K_t非空的$t\in T$全体记为D_M。

定理 5.4 D_M是可测集。

证 对每对自然数k，m，令$G(k, m)=\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\infty}$为$E^n$中所有满足 $|x_i|<k$，$|y_i|<k$，$|x_i-y_i|>\frac{1}{m}$的有理点对所成之集。进而对每对自然数n，i，记

$$E(k,m,n,i)=\left\{t\in T:M\left(t,\frac{x_i+y_i}{2}\right)+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}M(t,x_i)+\frac{1}{2}M(t,y_i)\right\} \tag{5.4}$$

由 GN 函数的定义，对每个 $x\in E^n$，$M(t, x)$ 是可测函数，故(5.4) 所确定的集合是可测集，我们验证

$$D_M=\bigcup_{k\,m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}E(k,m,n,i) \tag{5.5}$$

从而完成定理的证明。

任取$t\in D_M$，则存在$x,y\in E^n$，$x\neq y$ 使得

$$M\left(t,\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}M(t,x)+\frac{1}{2}M(t,y) \tag{5.6}$$

选k，$m\geqslant 1$ 使得 $\max(|x|,|y|)<k$，$|x-y|>\frac{1}{m}$，

对每个自然数n，由$G(k,m)$的稠性和$M(t,u)$ 的 连续性，可选择$(x_{in},y_{in})\in G(k,m)$使得 $\max(|x_{in}|,|y_{in}|)<k$，$|x_{in}-y_{in}|>\frac{1}{m}$

且

$$M\left(t,\frac{x_{in}+y_{in}}{2}\right)+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}M(t, x_{in})+\frac{1}{2}M(t, y_{in}) \tag{5.7}$$

换句话说，$t\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}E(k,m,n,i)$，当然更属于 (5.5) 右端。

反之，若t属于(5.5)右端，即存在$k,m\geqslant 1$ 使得对每个 n，存

在 $(x_{in}, y_{in}) \in G(k, m)$满足 (5.7) 式。因为 $\max(|x_{in}|, |y_{in}|) < k$，故 $\{(x_{in}, y_{in})\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列收敛。不失一般性，设它收敛于 (x, y)。在 (5.7) 中令 $n \to \infty$，顾及 $M(t, u)$ 的凸性和连续性，便得到 (5.6) 式。再注意到 $|x - y| \geq \frac{1}{m}$，便知$t \in D_M$，因而 (5.5) 式成立，定理获证。

注 对任何$x', y' \in E^n$，$r > 0$，以 $E(x', y', r)$记所有$t \in T$使得 (5.6) 式对某个$x, y \in E^n$成立而且 $|x - x'| < r$，$|y - y'| < r$。再对每个自然数k，令(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…为所有E^n中满足$|x_i - x'| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)r$，$|y_i - y'| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)r$ 的有理点对，然后定义 $E(k, n, i)$ 与 (5.4) 式右端相同，那么类似可证

$$E(x', y', r) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E(k, n, i) \qquad (5.8)$$

定理 5.5 存在$f, g \in X$使得$T(f(t) \neq g(t)) = D_M$且

$$M\left(t, \frac{f(t) + g(t)}{2}\right) = \frac{1}{2}M(t, f(t)) + \frac{1}{2}M(t, g(t)) \quad (t \in T)$$

证 对任给自然数m和每个k，令$\{(x_{k,i}, y_{k,i})\}_{i=1}^{\infty}$为$E^n$ 中满足

$$\inf\{|x - y| : x \in S_{k,i}, y \in S'_{k,i}\} \geq \frac{1}{m} \qquad (5.9)$$

的有理点对全体，这里$S_{k,i}$和$S'_{k,i}$分别表示E^n中以$x_{k,i}$和 $y_{k,i}$ 为心，以$\frac{1}{k}$为半径的开球。由定理5.4之注，对每个k, i，集$E\left(x_{k,i}, y_{k,i}, \frac{1}{k}\right)$是可测集。

今用归纳法定义可测集$\{F_{k,i}\}_{k,i=1}^{\infty}$。先置

$$F_{1,i} = E(x_{1,i}, y_{1,i}, 1) - \bigcup_{j=1}^{i-1} E(x_{1,j}, y_{1,j}, 1)$$

$(i = 1, 2, \cdots)$ （这里 $\bigcup_{j=1}^{0} E(x_{1,j}, y_{1,j}, 1) = \phi$）。设$\{F_{k-1,i}\}_{i=1}^{\infty}$

已经定义，则如下确定 $\{F_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$。对每个 $i=1, 2, \cdots$，选最小的自然数 $j=j(k, i)$ 使得

$$S_{k,i}\subset S_{k-1,j},\quad S'_{k,i}\subset S'_{k-1,j}$$

然后命

$$F_{k,i}=E\left(x_{k,i},y_{k,i},\frac{1}{k_1}\right)\cap F_{k-1,j}-\bigcup_{n=1}^{i-1}F_{k,n}\quad (5.10)$$

不难验证

$$E(m)\triangleq\bigcup_{i=1}^{\infty}E(x_{1,i},y_{1,i},1)=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_{k,i},\qquad D_M=\bigcup_{m=1}^{\infty}E(m)\quad (5.11)$$

而且对每个k，$\{F_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$两两不交。定义

$(u_k(t), v_k(t))=(x_{k,i},y_{k,i})$，$t\in F_{k,i}$，$(i=1, 2, \cdots)$

我们说明$\{(u_k(t), v_k(t))\}_{k=1}^{\infty}$于$E(m)$上处处收敛。

对于$t\in E(m)$，存在$i_1\geqslant 1$使$t\in F_{1,i_1}$，故 $(u_1(t), v_1(t))=(x_{1,i_1},y_{1,i_1})$。由$E(x, y, r)$定义，存在 $z_1\in S_{1,i_1}$，$z_1'\in S'_{1,i_1}$ 使得

$$M\left(t, \frac{z_1+z_1'}{2}\right)=\frac{1}{2}M(t, z_1)+\frac{1}{2}M(t, z_1')$$

由 (5.11)，存在 $i_2\geqslant 1$ 使 $t\in F_{2,i_2}$，因此 $(u_2(t), v_2(t))=(x_{2,i_2}, y_{2,i_2})$。因 $\{F_{1,i}\}_{i=1}^{\infty}$ 两两不交，由 (5.10) 式可推出 $j(2, i_2)=i_1$，从而 $S_{2,i_2}\subset S_{1,i_1}$，$S'_{2,i_2}\subset S'_{1,i_1}$ 且存在 $z_2\in S_{2,i_2}$，$z_2'\in S'_{2,i_2}$使得

$$M\left(t, \frac{z_2+z_2'}{2}\right)=\frac{1}{2}M(t,z_2)+\frac{1}{2}M(t, z_2')$$

如此下去，由归纳法，对任何 $k\geqslant 2$，存在 $i_k\geqslant 1$ 使得 $(u_k(t), v_k(t))=(x_{k,i_k},y_{k,i_k})$，$S_{k,i_k}\subset S_{k-1,i_{k-1}}$，$S'_{k,i_k}\subset S'_{k-1,i_{k-1}}$ 且存在$z_k\in S_{k,i_k}$，$z_k'\in S'_{k,i_k}$ 满足

$$M\left(t, \frac{z_k+z_k'}{2}\right)=\frac{1}{2}M(t, z_k)+\frac{1}{2}M(t, z_k')\quad (5.12)$$

注意到

$z_k, x_{k,i_k} \in S_{k,i_k} \subset S_{k-1,i_{k-1}}$；$z_k'$，$y_{k,i_k} \in S'_{k,i_k} \subset S'_{k-1,i_{k-1}}$ $(k=2, 3, \cdots)$，可知z_k，x_{k,i_k}必收敛于同一点$f_m(t)$，而z_k'，y_{k,i_k}必收敛于同一点$g_m(t)$，因而

$$\lim_{k\to\infty}(u_k(t), v_k(t)) = (f_m(t),\ g_m(t)) \qquad (t \in E(m))$$

显然 $f_m(t)$，$g_m(t)$ 的分量函数都是 $E(m)$ 上的可测函数．又由 (5.9) 式，$|f_m(t)-g_m(t)| \geq \frac{1}{m}(t \in E(m))$，再由 (5.12) 式

$$M\left(t,\ \frac{f_m(t)+g_m(t)}{2}\right) = \frac{1}{2}M(t,\ f_m(t)) + \frac{1}{2}M(t,\ g_m(t))$$

$(t \in E(m))$

因此，我们只需定义 $f(t)$，$g(t)$ 如下

$$(f(t),\ g(t)) = \begin{cases} (f_m(t),\ g_m(t)), & t \in E(m) \setminus \bigcup_{n=1}^{m-1} E(n) \\ & (m=1,\ 2,\ \cdots) \\ (0,\ 0) & \text{其他处} \end{cases}$$

定理 5.6 $u \in L_M{}^*$是$L_M{}^*$单位球端点的充要条件为$\rho_M(u)=1$且$T(u(t) \in K_t)$是零集．

证 充分性．若不然，则存在 $v, w \in L_M{}^*$，$v \neq w$ $\|v\| = \|w\| = 1$ 使得 $u = \frac{v+w}{2}$．注意到$v \neq w$表示集合 $T(v(t) \neq w(t))$ 为非零集，从而由条件可知

$$T_0 \triangleq T(v(t) \neq w(t)) - T(u(t) \in K_t)$$

不是零集．又由K_t定义，对任何$t \in T_0$

$$M(t,\ u(t)) < \frac{1}{2}M(t,\ v(t)) + \frac{1}{2}M(t,\ w(t))$$

因此

$$\int_{T_0} M(t,\ u(t))dt < \frac{1}{2}\int_{T_0} M(t, v(t))dt + \frac{1}{2}\int_{T_0} M(t,\ w(t))dt$$

联系$\|x\| \leq 1$时必有$\rho_M(x) \leq \|x\|$，得到矛盾结果

$$1=\rho_M(u)<\frac{1}{2}\int_T M(t,\ v(t))dt+\frac{1}{2}\int_T M(t,\ w(t))dt$$

$$=\frac{1}{2}\ \rho_M(v)+\frac{1}{2}\rho_M(w)\leqslant 1$$

必要性.(1) 因$\|u\|=1$，故$\rho_M(u)\leqslant 1$.若$\rho_M(u)=r<1$，我们可以选可测集$e\subset T(u(t)\neq 0)$使得

$$0<\int_e M(t,\ 2u(t))dt\leqslant 1-r$$

定义

$$(v(t),\ w(t))=\begin{cases}(2u(t),\ 0),\ t\in e\\(u(t),\ u(t)),\ t\in T\setminus e\end{cases}$$

则易知$v\neq w$，$u=\frac{v+w}{2}$且

$$\rho_M(w)\leqslant\rho_M(v)=\int_{T\setminus e}M(t,\ u(t))dt+\int_e M(t,\ 2u(t))dt$$

$$\leqslant 1-r+r=1$$

故$\|v\|\leqslant 1$，$\|w\|\leqslant 1$. 与u为$U(L_M{}^*)$端点相矛盾.

(2) 如果仿照（5.4）式引进

$$E_u(k,m,n,i)=\left\{t\in T:M\left(t,\ \frac{x_i+y_i}{2}\right)+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}M(t,\ x_i)+\frac{1}{2}M(t,y_i);\ \left|\frac{x_i+y_i}{2}-u(t)\right|<\frac{1}{n}\right\}$$

则由 $u(t)\in X$ 可知 $E_u(k,\ m,\ n,\ i)$ 也是可测集。类似定理5。4的证明，还可以验证

$$T(u(t)\in K_t)=\bigcup_{k,m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}E_u(k,\ m,\ n,\ i)$$

因而 $T(u(t)\in K_t)$ 也是可测集. 因此，若它为非零集，则必有$\text{mes}T(u(t)\in K_t)>0$.

将定理5.5证明中的$E\left(x_{k,i},y_{k,i},\ \frac{1}{k}\right)$代以

$$E_u\left(x_{k,i},y_{k,i},\frac{1}{k}\right)=\left\{t\in T:\exists\ x,y\in E^n\text{满足（5.6）式且}\right.$$

$$\left.|x-x_{k,i}|<\frac{1}{k},\quad |y-y_{k,i}|<\frac{1}{k},\quad \left|\frac{x+y}{2}-u(t)\right|<\frac{1}{k}\right\}$$

$$(5.13)$$

则类似可证存在f，$g\in X$，使得$T(f(t)\neq g(t))=T(u(t)\in K_t)$

$$M\left(t,\ \frac{f(t)+g(t)}{2}\right)=\frac{1}{2}M(t,\ f(t))+\frac{1}{2}M(t,g(t))\quad t\in T$$

$$(5.15)$$

而且由（5.13）右端最后的不等式还可知

$$u(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}g(t)\quad t\in T(u(t)\in K_t)\qquad(5.15)$$

记

$$T_1=\{t\in T(u(t)\in K_t):M(t,f(t))-M(t,g(t))>0\}$$
$$T_2=\{t\in T(u(t)\in K_t):M(t,f(t))-M(t,g(t))<0\}$$
$$T_3=\{t\in T(u(t)\in K_t):M(t,f(t))-M(t,g(t))=0\}$$

则$T(u(t)\in K_t)$为非零集时上面三个集中至少有一个不是零集．不妨设$\text{mes}T_1>0$，于是存在T_1的不交子集E，F使得

$$\int_E[M(t,f(t))-M(t,g(t))]dt=\int_F[M(t,f(t))-M(t,g(t))]dt>0\quad(5.16)$$

定义

$$(v(t),w(t))=\begin{cases}(u(t),\ u(t)), & t\in T\setminus E\cup F\\(f(t),\ g(t)), & t\in E\\(g(t),\ f(t)), & t\in F\end{cases}$$

则由（5.15）式，$u=\dfrac{v+w}{2}$，又由（5.16）式，$\text{mes}T(v(t)\neq w(t))=\text{mes}(E\cup F)>0$，故$v\neq w$．再由（5.14）式，$1=\rho_M(u)=\frac{1}{2}\rho_M(v)+\frac{1}{2}\rho_M(w)$；而由（5.16）式，$\rho_M(v)=\rho_M(w)$，因此

$$1 = \rho_M(u) = \rho_M(v) = \rho_M(w)$$

这表示$\|v\| = \|w\| = 1$，与u为$U(L_M^*)$端点相矛盾．

定理 5.7 矢值Orlicz空间L_M^*严格凸当且仅当$M(t,u)$满足Δ条件且D_M是零集．

证 充分性．对任何$u \in L_M^*$，$\|u\| = 1$，由定理 5.1，$\rho_M(u) = 1$．又 $T(u(t) \in K_t) \subset D_M$ 是零集，由定理5.6，u是$U(L_M^*)$端点，即L_M^*严格凸．

必要性．若$M(t,u)$不满足Δ条件，由定理5.1存在$u \in L_M^*$，$\|u\| = 1$，$\rho_M(u) < 1$．据定理5.5，u不是$U(L_M^*)$端点，与L_M^*严格凸性不相容．

若$\text{mes} D_M > 0$，由定理5.5，存在$f, g \in X$使得 $T(f(t) \neq g(t)) = D_M$且使得对所有$t \in T$成立

$$M\left(t, \frac{f(t) + g(t)}{2}\right) = \frac{1}{2} M(t, f(t)) + \frac{1}{2} M(t, g(t))$$

选 $E \subset D_M$ 使得 $0 < \text{mes} E < \text{mes} T$ 并且使

$$\int_E M(t, f(t)) dt = p \leqslant 1, \quad \int_E M(t, g(t)) dt = q \leqslant 1$$

再选$x \in E^n$，$F \subset T \backslash E$使得$\int_T M(t, x) dt = 1 - \frac{p+q}{2}$，定义

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(t) + g(t)], & t \in E \\ x & t \in F \\ 0 & t \in T \backslash E \cup F \end{cases}$$

则易见$\rho_M(u) = 1$，故$\|u\| = 1$．而$T(u(t) \in K_t) \supset E$ 不是零集，由定理5.6，u非$U(L_M^*)$端点，亦得矛盾．

§ 3 一致凸

对任给ε，$c \in (0,1)$，定义

$$F_t = \left\{(u,v) : u, v \in E^n, \ M\left(t, \frac{u-v}{2}\right) > \frac{1}{2} \max(M(t, \varepsilon u), M(t,\right.$$

$\varepsilon v)), M\left(t, \frac{u+v}{2}\right)>(1-c)\frac{M(t,u)+M(t,v)}{2}\}$

$$p_{\varepsilon,c}(t)=\sup\left\{\frac{|u-v|}{2}:(u, v)\in F_t\right\}$$

（这里仍约定，函数$\phi(u)$无上界时$\sup\limits_{u\in v}\phi(u)=+\infty$，而$v$为空集时$\sup\limits_{u\in v}\phi(u)=0$）。本节的主要结果是下面定理。

定理 5.8 矢值Orlicz空间$L_M{}^*$一致凸的充要条件是

(1) $M(t, u)$满足Δ条件；

(2) 对任何$\varepsilon\in(0,1)$，$\lim\limits_{c\to 0}\int_T \overline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))dt=0$。

先引入几个预备命题。

引理 5.3 对任何$\varepsilon,c\in(0, 1)$，存在x中点列$\{u_k{}^c,v_k{}^c\}_{k=1}^{\infty}$满足

(1) 对所有 $t\in T$，$\frac{|u_k{}^c(t)-v_k{}^c(t)|}{2}\uparrow_k p_{\varepsilon,c}(t)$；

(2) 对所有$t\in T(u_k{}^c(t)\neq v_k{}^c(t))$，有

$$M\left(t, \frac{u_k{}^c(t)-v_k{}^c(t)}{2}\right)>\frac{1}{2}\max\{M(t,\varepsilon u_k{}^c(t)),$$

$$M(t,\varepsilon v_k{}^c(t))\}$$

$(k=1, 2, \cdots)$；

(3) 只要$u_k{}^c(t)\neq v_k^c(t)$，就有

$$M\left(t, \frac{u_k{}^c(t)+v_k{}^c(t)}{2}\right)>(1-c)\frac{M(t,u_k{}^c(t))+M(t,v_k{}^c(t))}{2} \tag{5.17}$$

证 仿照对函数$h_{p,b}(t)$相应的讨论，即可完成本引理的证明。

由引理5.3的(1)还可以知道$p_{\varepsilon,c}(t)$是T上可测函数。

引理 5.4 设$M(t,u)$满足Δ条件，则对任何$\alpha\in(0,1)$，存在$\beta\in(0, 1)$使得$\rho_M(u)\leqslant 1-\alpha$蕴涵$\|u\|<1-\beta$。

证 完全与第一章相应定理雷同.

引理 5.5 在引理5.3的记号下，对任何$\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to 0}\sup_{k\geq 1}\rho_M\left(\frac{u_k^c-v_k^c}{2}\right)\geq\lim_{c\to 0}\int_T \underline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))dt$$

证 注意到$c\downarrow 0$时$\underline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))$和$\sup\limits_{k\leq 1}\rho_M\left(\frac{u_k^c-v_k^c}{2}\right)$都是非增的，所以引理中的两个极限都是存在的. 由于$k\to\infty$时$\left|\frac{u_k^c(t)-v_k^c(t)}{2}\right|$单调上升于$p_{\varepsilon,c}(t)$，故

$$M\left(t,\ \frac{u_k^c(t)-v_k^c(t)}{2}\right)\geq\underline{M}\left(t,\ \frac{|u_k^c(t)-v_k^c(t)|}{2}\right)\uparrow_k$$

$$\underline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))$$

从而由Levy定理

$$\sup_{k\geq 1}\rho_M\left(\frac{u_k^c-v_k^c}{2}\right)\geq\lim_{k\to\infty}\int_T\underline{M}\left(t,\ \left|\frac{u_k^c(t)-v_k^c(t)}{2}\right|\right)dt$$

$$=\int_T\underline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))dt$$

令$c\to 0$，便知引理不谬.

定理的证明.

充分性. 任给 $\delta\in(0,1)$，需寻求 $q(\delta)>0$ 使得对所有$x,y\in L_M^*,\|x\|=\|y\|=1$，$\left\|\frac{x-y}{2}\right\|\geq\delta$，都有$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq 1-q(\delta)$.

由条件 (1) 和定理5.3，L_M^*中模收敛与范数收敛等价，故存在$h>0$使得$\|x\|\geq\delta$蕴涵$\rho_M(x)\geq h$.

取定$\varepsilon\in\left(0,\ \frac{h}{3}\right)$. 由条件 (2)，存在$c\in(0,1)$使得

$$\int_T\overline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))dt<\frac{h}{3} \tag{5.18}$$

再由引理5.4，存在 $q(\delta)>0$ 使得 $\rho_M(x)\leq 1-\frac{ch}{3}$蕴涵 $\|x\|\leq 1$

$q(\delta)$。

任取 $u, v\in L_M^*$, $\|u\|=\|v\|=1$ 且 $\left\|\frac{u-v}{2}\right\|\geq\delta$, 则可知 $\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right)\geq h$. 由 (1) 和定理5.1还知$\rho_M(u)=\rho_M(v)=1$. 记

$$T_1=\left\{t\in T:M\left(t, \frac{u(t)-v(t)}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\max(M(t,\varepsilon u(t)),\right.$$

$$\left.M(t,\varepsilon v(t)))\right\}$$

$$T_2=\left\{t\in T: \left|\frac{u(t)-v(t)}{2}\right|\leq p_{\varepsilon,c}(t)\right\}$$

$$T_3=T\backslash T_1\cup T_2$$

由$p_{\varepsilon,c}(t)$的定义不难理解$t\in T_3$时

$$M\left(t, \frac{u(t)+v(t)}{2}\right)\leq\frac{1-c}{2}[M(t,u(t))+M(t,v(t))]$$

从而

$$\int_T M\left(t, \frac{u(t)+v(t)}{2}\right)dt\leq\int_{T_1\cup T_2}\frac{M(t, u(t))+M(t, v(t))}{2}dt$$

$$+(1-c)\int_{T_3}\frac{M(t,u(t))+M(t,v(t))}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\rho_M(u)+\frac{1}{2}\rho_M(v)-c\int_{T_3}\frac{M(t,u(t))+M(t,v(t))}{2}dt \tag{5.19}$$

又由T_1, T_2的定义及 (5.18) 式

$$h\leq\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right)\leq\int_{T_1}\frac{M(t,\varepsilon u(t))+M(t,\varepsilon v(t))}{2}dt$$

$$+\int_{T_2}\overline{M}(t,p_{\varepsilon,c}(t))dt+\int_{T_3}M\left(t, \frac{u(t)-v(t)}{2}\right)dt$$

$$\leq\left(\frac{1}{2}\|\varepsilon u\|+\frac{1}{2}\|\varepsilon v\|\right)+\frac{h}{3}+\int_{T_3}M\left(t, \frac{u(t)-v(t)}{2}\right)dt$$

$$<\frac{2}{3}h+\int_{T_3}\frac{M(t, u(t))+M(t,v(t))}{2}dt$$

顾及（5.19）式，得

$$\rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant 1-c\frac{h}{3}$$

从而 $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\leqslant 1-q(\delta)$.

必要性. 由定理5.7，知（1）必要. 若(2)不满足，则存在$a\in(0, 1)$，$c_n\to 0^+$，使对每一c_n有

$$\rho_M\left(\frac{u_{k_n}^{c_n}-v_{k_n}^{c_n}}{2}\right)>a$$

又由（1），L_M*中模收敛与范数收敛等价，故存在$h\in(0,a)$使得$\rho_M(x)\leqslant h$蕴涵$\|x\|\leqslant\varepsilon$. 对每一固定$n\geqslant 1$记$u_n(t)=u_{k_n}^{c_n}(t)$，

$v_n(t)=v_{k_n}^{c_n}(t)$并取$e_n\subset T(u_n(t)\neq v_n(t))$使

$$\int_{e_n}M\left(t, \frac{u_n(t)-v_n(t)}{2}\right)dt=h$$

注意引理5.3之（2）表示在$T(u_n(t)\neq v_n(t))$上恒有

$$M\left(t, \frac{u_n(t)-v_n(t)}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\max\{M(t,\varepsilon u_n(t)),M(t,\varepsilon v_n(t))\}$$

于是由

$$\int_{e_n}M(t,\varepsilon u_n(t))dt\leqslant\int_{e_n}M\left(t, \frac{u_n(t)-v_n(t)}{2}\right)dt=h$$

知$\|\varepsilon u_n\chi_{e_n}\|\leqslant\varepsilon$或$\|u_n\chi_{e_n}\|\leqslant 1$. 同理$\|v_n\chi_{e_n}\|\leqslant 1$.记

$$T_1=\{t\in e_n:M(t,u_n(t))\geqslant M(t,v_n(t))\}$$

$T_2=e_n\backslash T_1$，则

$$\int_{T_1}[M(t,u_n(t))-M(t,v_n(t))]dt=a_1\geqslant 0$$

$$\int_{T_2}[M(t,v_n(t))-M(t,u_n(t))]dt=a_2\geqslant 0$$

由第一式，可取$E_1\subset T_1$使得

$$\int_{E_1}[M(t,u_n(t))-M(t,v_n(t))]dt=\frac{a_1}{2}$$

于是

$$\int_{E_1}[M(t,u_n(t))-M(t,v_n(t))]dt$$
$$=\int_{T_1\setminus E_1}[M(t,u_n(t))-M(t,v_n(t))]dt$$

或写为

$$\int_{E_1}M(t,u_n(t))dt+\int_{T_1\setminus E_1}M(t,v_n(t))dt$$
$$=\int_{T_1\setminus E_1}M(t,u_n(t))dt+\int_{E_1}M(t,v_n(t))dt \tag{5.20}$$

同理存在$E_2\subset T_2$使得

$$\int_{E_2}M(t,v_n(t))dt+\int_{T_2\setminus E_2}M(t,u_n(t))dt$$
$$=\int_{T_2\setminus E_2}M(t,v_n(t))dt+\int_{E_2}M(t,u_n(t))dt \tag{5.21}$$

定义

$$(x_n'(t),\ y_n'(t))=\begin{cases}(u_n(t),\ v_n(t)),\ t\in E_1\cup(T_2\setminus E_2)\\ (v_n(t),\ u_n(t)),\ t\in E_2\cup(T_1\setminus E_1)\\ (0,\ 0),\ \text{其他处}\end{cases} \tag{5.22}$$

将（5.20），（5.21）两边分别相加，并注意到

$$\int_{e_n}M(t,\ u_n(t))dt\leqslant 1,\quad \int_{e_n}M(t,v_n(t))dt\leqslant 1$$

便知

$$\rho_M(x_n')=\rho_M(y_n')=\beta_0\leqslant 1 \tag{5.23}$$

由e_n的选择，易知$\mathrm{mes}(T\setminus e_n)>0$，故可选 $x_0\in E^n$及$F_n\subset T\setminus e_n$ 使得

$$\int_{F_n}M(t,x_0)dt=1-\beta_0 \tag{5.24}$$

令

$$(x_n(t),\ y_n(t))=\begin{cases}(x_n'(t),\ y_n'(t)),\ t\overline{\in}F_n\\ (x_0,x_0),\ t\in F_n\end{cases} \tag{5.25}$$

由 (5.23)，(5.24) 及 (5.25) 式，显见$\rho_M(x_n)=\rho_M(y_n)=1$，从而$\|x_n\|=\|y_n\|=1$．再由 (5.17)

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|\geqslant\rho_M\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)=\int_{e_n}M\left(t,\ \frac{u_n(t)+v_n(t)}{2}\right)dt$$

$$+\int_{F_n}M(t,x_0)dt$$

$$\geqslant(1-C_n)\int_{e_n}\frac{M(t,u_n(t))+M(t,v_n(t))}{2}dt+$$

$$(1-C_n)\int_{F_n}M(t,\ x_0)dt=(1-C_n)\frac{\rho_M(x_n)+\rho_M(y_n)}{2}$$

$$=1-C_n\to1\quad(n\to\infty)$$

但由 (5.20)，(5.21) 及 (5.22) 式

$$\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|\geqslant\rho_M\left(\frac{x_n-y_n}{2}\right)=\int_{e_n}M\left(t,\ \frac{u_n(t)-v_n(t)}{2}\right)dt$$

$$=h>0$$

与$L_M{}^*$一致凸性相矛盾．

§4 Musielak-Orlicz 空间

定义 5.3 设 $(T,\ \Sigma,\ \mu)$ 为无原子的测度空间．函数$M:T\times[0,\ \infty]\to[0,\ \infty]$称为含参量的$\phi$函数，假如它满足

(1) 对几乎所有的 $t\in T$，$M(t,\ 0)=0$；$\lim\limits_{u\to\infty}M(t,u)=\infty$且存在$u_0>0$使$M(t,\ u_0)<\infty$；

(2) 对几乎所有的$t\in T$，$M(t,\ u)$关于u是$[0,\ \infty]$上的凸函数；

(3) 对每个$u\in[0,\ \infty]$，$M(t,\ u)$关于 t 是T上的μ可测函数．

容易看出，对几乎所有的 $t\in T$，只要 $M(t,\ u_0)<\infty$，那么$M(t,\ u)$在$[0,\ u_0)$ 上是u的连续非减函数．

设 $M(t,\ u)$ 为含参量ϕ函数，$(X,\ \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，记X_T为所有定义在T上、取值于X内的强μ可测函数$x(t)$的集合．

规定$x\in X_T$的模为

$$\rho_M(x)=\int_T M(t,\ \|x(t)\|)d\mu$$

再如同§1定义 Orlicz类L_M，$L_M{}^*$ 及 $L_M{}^*$ 上的 Luxemburg 范数 $\|\cdot\|_{(M)}$，那么 $(L_M{}^*,\ \|\cdot\|_{(M)})$ 也是 Banach 空间，我们称它为 Musielak-Orlicz 空间。$L_M{}^*$ 中元素 $x=y$ 亦指$x(t)\overset{a.e.}{=}y(t)$。

引入记号

$$e(t)=\sup\{u\geqslant 0:M(t,u)=0\}$$

$$E(t)=\sup\{u\geqslant 0:M(t,u)<\infty\}$$

易见对几乎所有的$t\in T$有

$$u\in[0,e(t))\Rightarrow M(t,u)=0;\quad u>e(t)\Rightarrow M(t,u)>0$$

$$0\leqslant u<E(t)\Rightarrow M(t,u)<\infty;\quad u>E(t)\Rightarrow M(t,u)=\infty$$

命题 5.1 $e(t)$和$E(t)$是T上的μ可测函数。

证 取$[0,\ \infty)$ 的一个可数稠集$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，命

$B_k=\{t\in T:M(t,\ r_k)=0\}$，$q_k(t)=r_k\chi_{B_k}(t)\qquad(k=1,2,\cdots)$

则由定义5.3之 (3)，B_k为μ可测集，从而$q_k(t)$为μ 可测函数。又由定义不难看出对几乎所有的 $t\in T$ 和所有的k有 $e(t)\geqslant q_k(t)$，因此，若能说明 $e(t)\leqslant\sup\limits_{k\geqslant 1}q_k(t)$ 于T上$\mu-a.e.$成立，便知 $e(t)\overset{a.e.}{=}\sup\limits_{k\geqslant 1}q_k(t)$，因而是$\mu$可测的。对每个使定义5.3的 (1)，(2) 成立的$t\in T$，不妨设$e(t)>0$，对任何 $\varepsilon\in(0,\ e(t))$，取 $r_k\in(e(t)-\varepsilon,\ e(t))$，那么$M(t,r_k)=0$，于是$q_k(t)=r_k>e(t)-\varepsilon$，从而$\mu-a.e.$成立 $\sup\limits_{k\geqslant 1}q_k(t)\geqslant e(t)$。

定义 5.4 含参量ϕ函数$M(t,\ u)$满足Δ条件是指存在 $K\geqslant 1$ 和T上的μ可测非负函数$\delta(t)$ 使得$\int_T M(t,\delta(t))d\mu<\infty$ 且对几乎所有$t\in T$，只要$u\geqslant\delta(t)$，就有$M(t,2u)\leqslant KM(t,u)$。

当$M(t,u)$满足Δ条件时，在T上$\mu-a.e.$成立$E(t)=\infty$。事实上，因$\int_T M(t,\delta(t))d\mu<\infty$，所以在 T上$\mu-a.e.$有$\delta(t)\leqslant E(t)$。今设$E=T(E(t)<\infty)$ 为非零集。分两种形情讨论。1. $\mu E(E(t)$

$=\delta(t))>0$. 由定义 5.3 之 (1)，几乎处处有 $E(t)>0$，故在 $E(E(t)=\delta(t))$ 上几乎处处有 $2\delta(t)=2E(t)>E(t)$，从而在 $E(E(t)=\delta(t))$ 上几乎处处有 $M(t,\delta(t))<\infty$，但 $M(t,2\delta(t))=\infty$。这与Δ条件不合。2. 当1.不真时在 E上$\mu-a \cdot e \cdot$成立 $E(t)>\delta(t)$。由假设$\mu E>0$可知存在$\varepsilon>0$使

$$E_\varepsilon=\{t\in E:E(t)-\varepsilon>\delta(t);2(E(t)-\varepsilon)>E(t)\}$$

为非零集。于是在 E_ε上$\mu-a \cdot e \cdot$有 $M(t,E(t)-\varepsilon)<\infty$但 $M(t,2(E(t)-\varepsilon))=\infty$，也与$\Delta$条件冲突。这就说明了$E$必为零集，即在$T$上$\mu-a.e.$有$E(t)=\infty$。

对给定实数p，$b>1$，记

$$h_{b,p}(t)=\begin{cases}\sup\limits_{h\in E_t} h, & \text{当 } E(t)=\infty \text{ 时}\\ \infty, & \text{当 } E(t)<\infty \text{ 时}\end{cases}$$

这里

$$E_t=\{u>0:M(t,bu)>pM(t,u)\}\quad t\in T$$

类似§1中相应部分，可以验证$h_{p,b}(t)$是T上的μ可测函数，此外还可以得到下述三个定理

定理 5.9 下述命题等价

(1) $M(t,u)$不满足Δ条件；

(2) 对任何实数$p,b>1$，$\int_T M(t,h_{p,b}(t))d\mu=\infty$；

(3) $E=T(E(t)<\infty)$ 的测度非零或者对任何实数

$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots>1$；$1<p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots$，$q_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$

存在T上的μ可测非负函数列$\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$和$\Sigma$中两两不交的集列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$使得$t\in e_n$时$x_n(t)<\infty$且

$$\int_{e_n} M(t,x_n(t))d\mu=q_n;\quad M(t,b_{k_n}x_n(t))\geqslant p_{k_n}M(t,x_n(t))\,(t\in e_n)$$

其中$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$为自然数列的一个子列；

(4) 对任何 $\varepsilon>0$，$\varepsilon<1$，存在 $u_0\in L_M^*$ 使 $\rho_M(u_0)=\varepsilon$，$\|u_0\|_{(M)}=1$且对几乎所有的 $t\in T$ 有$|u_0(t)|<E(t)$；

(5) 存在 $u_0\in L_M^*$ 使$\rho_M(u_0)<1$，$\|u_0\|_{(M)}=1$ 且对几乎所

有的$t\in T$有$\|u_0(t)\|<E(t)$.

定理 5.10 L_M 为线性空间的充要条件是 $M(t,u)$ 满足Δ条件.

定理 5.11 L_M^* 中模收敛与范数收敛等价的充要条件是$M(t,u)$满足Δ条件且$\mu-a\cdot e\cdot$成立$e(t)=0$.

§ 5 Musielak-Orlicz 空间的端点与严格凸

设$M(t,u)$是含参量的ϕ函数. 不失一般性，我们恒假定对所有$t\in T$, $M(t,0)=0$ 且 $M(t,u)$关于u是$[0,\infty]$上的凸函数.

对$t\in T$, $v>0$, 若存在$\varepsilon\in(0,v)$使得

$$M(t,v)=\frac{1}{2}M(t,v+\varepsilon)+\frac{1}{2}M(t,v-\varepsilon)<\infty$$

就称v是$M(t,u)$关于t的一个非严格凸点. 当$e(t)>0$ 时也称 0 是$M(t,u)$关于t的非严格凸点. 我们把 $M(t,u)$ 关于t的非严格凸点的全体记为K_t.

相应于$M(t,u)$, 我们记

$$M_0(t,u)=\begin{cases}\lim\limits_{v\to E(t)^-}M(t,v), & 当\ u=E(t)\ 时\\ M(t,u), & 当\ u\neq E(t)\ 时\end{cases}$$

命题 5.2 $M_0(t,u)$与$M(t,u)$具有相同的K_t.

证 只须注意$E(t)$总不是$M(t,u)$ 和 $M_0(t,u)$的关于t的非严格凸点。

命题 5.3 若$x\in U(L_M^*)$, 则$\|x(t)\|\leqslant E(t)$于T 上 $\mu-a\cdot e\cdot$成立.

证 命

$$A_n=\left\{t\in T:\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x(t)\|>E(t)\right\}\quad(n=1,2,\cdots)$$

则命题不真时必有某n_0使$\mu A_{n_0}>0$.由于$u>E(t)$时$M(t,u)=\infty$, 故

$$\rho_M\left(\left(1-\frac{1}{n_0}\right)x\right)\geqslant\int_{A_{n_0}}M\left(t,\ \left(1-\frac{1}{n_0}\right)\|x(t)\|\right)d\mu=\infty$$

因而有 $\|x\|_{(M)}\geqslant\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{n_0}}>1$.矛盾.

命题 5.4 $x\in U(L_M{}^*)$当且仅当$\rho_{M_0}(x)\leqslant 1$.

证 设 $x\in U(L_M{}^*)$. 由命题5.3, 对任何 $l\in(0,\ 1)$, 有 $l\|x(t)\|<E(t)$ ($\mu-a.e.$于T), 从而由$M_0(t,u)$的定义,

$$1\geqslant\rho_M(lx)=\int_T M_0(t,l\|x(t)\|)d\mu=\rho_{M_0}(lx)$$

令$l\to1^-$, 由Levy定理即得$1\geqslant\rho_{M_0}(x)$.

反之, 若 $\rho_{M_0}(u)\leqslant 1$, 则对任何$l\in(0,\ 1)$有 $1\geqslant\rho_{M_0}(lx)=\rho_M(lx)$, 从而 $\|x\|_{(M)}\leqslant\dfrac{1}{l}$, 再由$l$的任意性便知$x\in U(L_M{}^*)$.

定理 5.12 $u\in S(L_M{}^*)$是$U(L_M{}^*)$的端点的充要条件是

(1) $\lim\limits_{l\to1^-}\rho_M(lu)=1$ 或 $\|u(t)\|=E(t)$ ($\mu-a.e.$于T);

(2) 对任何 $v,\ w\in X_T$ 满足$u=\dfrac{v+w}{2}$且 $\|v(t)\|=\|w(t)\|=\|u(t)\|$ ($\mu-a.e.$于T), 都有$v=w$;

(3) $H=\{t\in T:\|u(t)\|\in K_t\}$的$\mu$测度为零.

证 充分性. 设 $u\in S(L_M{}^*)$ 不是 $U(L_M{}^*)$ 的端点, 即有 $v,\ w\in U(L_M{}^*)$使 $u=\dfrac{v+w}{2}$, 但$v\neq w$.因为对几乎所有的 $t\in T$ 有

$$\|u(t)\|=\left\|\frac{v(t)+w(t)}{2}\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|v(t)\|+\frac{1}{2}\|w(t)\|$$

又由 (2) 知

$$\mu\{t\in T:\|v(t)\|=\|w(t)\|=\|u(t)\|;\ v(t)\neq w(t)\}=0$$

所以$v\neq w$时

$$0<\mu\{t\in T:v(t)\neq w(t)\}$$

$$=\mu\{t\in T:\|v(t)\|>\|u(t)\|\text{或}\|w(t)\|>\|u(t)\|\}$$

不失一般性，可设

$$T_0=\{t\in T:\|v(t)\|>\|u(t)\|\}$$

的μ测度不为零.

1. 假定$\|u(t)\|=E(t)$ ($\mu-a\cdot e\cdot$于T). 于是对几乎所有的$t\in T_0$有$\|v(t)\|>E(t)$，这与命题5.3矛盾.

若1.不真，则由命题5.4的证明和 (1)

$$\rho_{M_0}(u)=\lim_{l\to 1^-}\rho_{M_0}(lu)=\lim_{l\to 1^-}\rho_M(lu)=1$$

2. 假定

$$T^*=\left\{t\in T:\|u(t)\|<\frac{1}{2}\|v(t)\|+\frac{1}{2}\|w(t)\|\right\}$$

的μ测度不为零。因为从$\rho_{M_0}(u)=1$ 可推知对几乎所有的 $t\in T$ 有$M_0(t,\ \|u(t)\|)<\infty$，故对任何$\varepsilon>0$有

$$M_0(t,\|u(t)\|)<M_0(t,\ \|u(t)\|+\varepsilon)\quad(\mu-a\cdot e\cdot\text{于}T)$$

从而对几乎所有$t\in T^*$

$$M_0(t,\ \|u(t)\|)<M_0\left(t,\ \frac{1}{2}\|v(t)\|+\frac{1}{2}\|w(t)\|\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}M_0(t,\|v(t)\|)+\frac{1}{2}M_0(t,\|w(t)\|)$$

于是

$$\int_{T^*}M_0(t,\|u(t)\|)d\mu<\frac{1}{2}\int_{T^*}[M_0(t,\|v(t)\|)+M_0(t,\|w(t)\|)]d\mu$$

这样一来，根据命题5.4就有矛盾

$$1=\rho_{M_0}(u)\leqslant\frac{1}{2}\int_{T\setminus T^*}[M_0(t,\|v(t)\|)+M_0(t,\|w(t)\|)]d\mu$$

$$+\int_{T^*}M_0(t,\|u(t)\|)d\mu<\frac{1}{2}\rho_{M_0}(v)+\frac{1}{2}\rho_{M_0}(w)\leqslant 1$$

若2.不真，则对几乎所有$t\in T$

$$\|u(t)\| = \frac{1}{2}\|v(t)\| + \frac{1}{2}\|w(t)\|$$

此时由（3），对几乎所有$t\in T_0$

$$M_0(t,\|u(t)\|)<\frac{1}{2}M_0(t,\|v(t)\|)+\frac{1}{2}M_0(t,\|w(t)\|)$$

再由$\mu T_0>0$，如同2.的推导亦可得到矛盾.

必要性. 设$u\in S(L_M{}^*)$是$U(L_M{}^*)$的端点. 若（1）不真，则$\rho_{M_0}(u)=\lim\limits_{l\to 1^-}\rho_{M_0}(lu)=r<1$ 且存在$\lambda>0$ 使

$$T_\lambda=\{t\in T:\lambda+\|u(t)\|<E(t)\}$$

的μ测度不为零.从而可选取$e\subset T_\lambda$，$\mu e>0$ 使得

$$\int_e M(t,\ \lambda+\|u(t)\|)d\mu\leqslant 1-r$$

设$x\in X$满足$\|x\|=\lambda$；命

$$(v(t),\ w(t))=\begin{cases}(u(t)+x,\ u(t)-x), & \text{当 } t\in e \text{ 时}\\ (u(t),\ u(t)), & \text{当 } t\in T\setminus e\text{时}\end{cases}$$

则 v，$w\in X_T$，$u(t)=\dfrac{v(t)+w(t)}{2}$且由 $\mu e>0$ 知 $v\neq w$. 又从

$$\rho_{M_0^*}(v)\leqslant\int_e M_0(t,\lambda+\|u(t)\|)du+\int_{T\setminus e}M_0(t,\ \|u(t)\|)\,d\mu$$
$$\leqslant(1-r)+\rho_{M_0}(u)=1$$

及命题 5.4 可知 $v\in U(L_M{}^*)$. 同理可证 $w\in U(L_M{}^*)$，这与u为$U(L_M{}^*)$的端点相矛盾.

（2）的必要性是明显的.

今证（3）.记

$$H'=\{t\in T:u(t)=\theta,\ e(t)>0\}$$
$$H''=\{t\in T:\exists\ \varepsilon\in(0,\|u(t)\|),\ M(t,\ \|u(t)\|)$$
$$=\frac{1}{2}M(t,\varepsilon+\|u(t)\|)+\frac{1}{2}M(t,\ \|u(t)\|-\varepsilon)\}$$

则 $H=H'\cup H''$. 因此，若（3）不真，那么必有 $\mu H'>0$ 或者

$\mu H''>0$。

若 $\mu H'>0$，那么取 $I\in X$ 满足 $\|I\|=1$，命

$$(v(t),\ w(t))=\begin{cases}(e(t)I,\ -e(t)I), & \text{当 } t\in H' \text{ 时}\\ (u(t),\ u(t)), & \text{当 } t\in T\backslash H' \text{时}\end{cases}$$

则容易看出 v，$w\in X_T$，$v\neq w$ 且 $u=\frac{v+w}{2}$. 再由 $M_0(t,\ u)$ 的定义，对所有 $t\in T$ 有 $M_0(t,\ e(t))=0$.联系命题 5.4，可计算出 $\rho_{M_0}(v)=\rho_{M_0}(w)=\rho_{M_0}(u)\leqslant 1$，又与 u 为 $U(L_M{}^*)$ 的端点相矛盾.

若 $\mu H''>0$，则命

$$H_M=\left\{t\in T: u(t)\neq\theta,\ M(t,\ \|u(t)\|)=\frac{1}{2}M\left(t,\ \left(1+\frac{1}{m}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\|u(t)\|\right)+\frac{1}{2}M\left(t,\left(1-\frac{1}{m}\right)\|u(t)\|\right)<\infty\right\}$$

$(m=1,2,\cdots)$，则 H_m 为 μ 可测集且容易看出 $H''=\bigcup_{m=1}^{\infty}H_m$. 因此必有某个 n 使得 $\mu H_n>0$. 设

$$a(t)=M\left(t,\left(1+\frac{1}{n}\right)\|u(t)\|\right)-M\left(t,\left(1-\frac{1}{n}\right)\|u(t)\|\right)$$

选 H_n 的两个不交正测度子集 E，F 使得

$$\int_E a(t)d\mu=\int_F a(t)d\mu$$

再命

$$(v(t),\ w(t))=\begin{cases}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)u(t),\ \left(1-\frac{1}{n}\right)u(t)\right), & \text{当 } t\in E \text{ 时}\\ \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)u(t),\ \left(1+\frac{1}{n}\right)u(t)\right), & \text{当 } t\in F \text{ 时}\\ (u(t),\ u(t)), & \text{当 } t\in T\backslash E\cup F \text{时}\end{cases}$$

则显然 $v,w\in X_T$，$u=\frac{v+w}{2}$.又从 $\mu(E\cup F)>0$ 和 $t\in H''$ 时 $u(t)\neq\theta$ 可知 $v\neq w$.再由 H_n 的定义和 E，F 的选择，不难计算出

$$\int_{E\cup F} M(t,\|v(t)\|)d\mu=\int_{E\cup F} M(t,\|w(t)\|)d\mu$$
$$=\int_{E\cup F} M(t,\|u(t)\|)d\mu$$

顾及由 H_n 的定义及 $M(t, u)$ 的凸性，$t\in H_n$ 时 $M(t, u)$ 在 $\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\|u(t)\|,\left(1+\frac{1}{n}\right)\|u(t)\|\right]$上是线性的，因而是连续的，所以上面等式中的$M(t, u)$均可改写为$M_0(t,u)$，从而直接可以计算出$\rho_{M_0}(v)=\rho_{M_0}(w)=\rho_{M_0}(u)\leqslant 1$，这与$u$为$U(L_M{}^*)$的端点相矛盾。

定理 5.13 $L_M{}^*$为严格凸的充要条件是

(1) $M(t,u)$满足Δ条件；

(2) X 为严格凸的；

(3) 对几乎所有的$t\in T$，$M(t,u)$关于u是严格凸的。

证 充分性。设 $u\in S(L_M{}^*)$，须证u为$U(L_M{}^*)$的端点，即要验证定理5.12中的 (1)，(2)，(3) 满足。显然由 (2)，(3) 可分别得到定理 5.12 中的 (2)，(3) 再由 (1) 和定理5.9的 (5) 可知 $\lim\limits_{l\to 1^-}\rho_M(lu)=\rho_M(u)=1$，即定理 5.12中的 (1) 成立。

必要性。由定理5.9的 (5) 和定理5.12之 (1) 可知 (1) 必要。

若 (2) 不满足，则存在x, y, $z\in S(X)$，$y\neq z, x=\frac{y+z}{2}$。取充分大正数 a 使$\int_T M(t,a)d\mu\geqslant 1$。由 (1) 可知几乎处处有$M(t, a)<\infty$。故可选$\mu$可测集$T_0\subset T$使得$\int_{T_0} M(t,a)d\mu=1$。命

$$u(t)=ax\chi_{T_0}(t), v(t)=ay\chi_{T_0}(t), w(t)=az\chi_{T_0}(x)$$

容易看出，$u,v,w\in X_T$，$u=\frac{v+w}{2}$，$v\neq w$，$\|u(t)\|=\|v(t)\|=$

$\|w(t)\|(t\in T)$.又从

$$\rho_M(u)=\rho_M(v)=\rho_M(w)=\int_{T_0}M(t,a)d\mu=1$$

可知 $u,v,w\in S(L_M{}^*)$.于是得知u不是$U(L_M{}^*)$的端点，与假设相矛盾.

最后证（3）．设 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$为（0，∞）的一个可数稠集。对 n，$k=1,2,\cdots$,定义μ可测集

$$G_{k,n}=\left\{t\in T:M(t,r_k)=\frac{1}{2}M\left(t,\left(1+\frac{1}{n}\right)r_k\right)+\frac{1}{2}M\left(t,\left(1-\frac{1}{n}\right)r_k\right)\right\}$$

同样由$M(t,u)$关于u的凸性不难验证

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}G_{k,n}=\{t\in T:K_t\text{ 非空}\}$$

因此（3）不满足时必有某G_{k_0,n_0}为非零集．因由（1），几乎处处有$M(t,r_{k_0})<\infty$，所以存在 $r\in(0,1)$ 和非零μ可测集 $T_1\subset G_{k_0,n_0}$使得$\int_{T_1}M(t,r_{k_0})d\mu=r$，再取$d$充分大使 $\int_{T\setminus T_1}M(t,d)d\mu\geq 1-r$，然后选$\mu$可测集$T_2\subset T\setminus T_1$使 $\int_{T_2}M(t,d)d\mu=1-r$.定义

$$u(t)=r_{k_0}\,I\chi_{T_1}(t)+dI\chi_{T_2}(t)$$

其中$I\in S(X)$，则容易知道$u\in S(L_M{}^*)$.因由G_{k_0,n_0}的定义可知

$$\{t\in T:\|u(t)\|\in K_t\}\supset T_1$$

而$\mu T_1>0$，故由定理5.12之（3）知u不是$U(L_M{}^*)$的端点.这一矛盾最终使定理获证.

§6. Musielak-Orlicz空间的一致凸性

先引入两个辅助命题

命题 5.5 设X是一致凸空间，则对任何$a>0$，存在$\varepsilon>0$，

使得 $\|x-y\|\geqslant a\max(\|x\|,\ \|y\|)$ $(x,\ y\in X)$ 时$\|x+y\|\leqslant(1-\varepsilon)$ $(\|x\|+\|y\|)$ 或者$|\|x\|-\|y\||\geqslant\varepsilon\max(\|x\|,\|y\|)$.

证 若不然，则存在 $a>0$，x_n，$y_n\in X$ 使得 $\|x_n-y_n\|\geqslant a\max(\|x_n\|,\|y_n\|)$，$\|x_n+y_n\|>\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(\|x\|+\|y\|)$ 且 $|\|x_n\|-\|y_n\||<\dfrac{1}{n}\max(\|x_n\|,\|y_n\|)$.记$\max(\|x_n\|,\|y_n\|)=\alpha_n$，则$\alpha_n>0$，$\dfrac{x_n}{\alpha_n}$，$\dfrac{y_n}{\alpha_n}\in U(X)$，$\|x_n-y_n\|\geqslant a\alpha_n$ 且容易计算出 $\left|\dfrac{x_n}{\alpha_n}+\dfrac{y_n}{\alpha_n}\right|\to 2$ $(n\to\infty)$.这与X的一致凸性相悖了.

命题 5.6 设$M(t,u)$满足Δ条件，$e(t)=0$于T上 $\mu-a\cdot e\cdot$成立，则

$$\rho_M(u)\to 0\Leftrightarrow\|u\|_{(M)}\to 0;\quad \rho_M(u)\to 1\Leftrightarrow\|u\|_{(M)}\to 1$$

证 与第一章相应结果的证明相同.

设 $M(t,u)$为含参量ϕ函数.对任意$\varepsilon,c\subset\in(0,1)$，$t\in T$，定义

$$E_t=\left\{(u,\ v):u,v\geqslant 0;\ |u-v|\geqslant\varepsilon\max(u,v);\ M\left(t,\frac{u+v}{2}\right)\right.$$
$$\left.>(1-c)\frac{M(t,u)+M(t,v)}{2}\right\}$$

$$p_{\varepsilon,c}(t)=\sup\{u-v:(u,v)\in E_t\}$$

则类似§3的相应部分可以验证$p_{\varepsilon,c}(t)$是T上的μ可测函数.

定理 5.14 下列条件等价

(1) $L_M{}^*$是一致凸的;

(2) $M(t,u)$满足Δ条件; X是一致凸的，$e(t)=0(\mu\text{-}a\cdot e\cdot)$且对任何$\varepsilon\in(0,\ 1)$，$\lim\limits_{c\to 0}\int_T M(t,p_{\varepsilon,c}(t))d\mu=0$;

(3) $M(t,u)$满足Δ条件; X是一致凸的，$e(t)=0(\mu\text{-}a\cdot e\cdot)$且有

(*) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，$\exists\ f(t)\geqslant 0$，$\int_T M(t,\ f(t))d\mu\leqslant$

ε，使对几乎所有的 $t\in T$ 和所有 $x, y\geqslant 0$，只要 $|x-y|\geqslant \varepsilon\max(x, y)$和$|x-y|\geqslant f(t)$，就有

$$M\left(t, \frac{x+y}{2}\right)\leqslant \frac{1-\delta}{2}[M(t,x)+M(t,y)]$$

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 (1) 成立。由定理5.13，知$M(t, u)$满足Δ条件。若X非一致凸，则有$x_n, y_n\in S(X), \varepsilon_0>0$使 $\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon_0$ 且 $\|x_n+y_n\|>2\left(1-\frac{1}{n}\right)(n=1, 2, \cdots)$。

取正数a充分大使$\int_T M(t,a)d\mu\geqslant 1$。由$\Delta$条件，$M(t,a)$是$T$上的$\mu$-$a\cdot e\cdot$有限函数，因此存在$T_0\subset T$ 使$\int_{T_0} M(t,a)d\mu=1$。今定义

$$(u_n(t), v_n(t))=a\chi_{T_0}(t)(x_n, y_n)$$

$(n=1,2,\cdots)$，则$u_n, v_n\in X_T$

$$\rho_M(u_n)=\rho_M(v_n)=\int_{T_0} M(t,a)d\mu=1$$

从而$u_n, v_n\in S(L_M{}^*)$。又

$$\rho_M\left(\frac{u_n-v_n}{\varepsilon_0}\right)=\int_{T_0} M\left(t, \frac{a\|x_n-y_n\|}{\varepsilon_0}\right)d\mu\geqslant\int_{T_0} M(t,a)d\mu=1$$

根据$\|\cdot\|_{(M)}$的定义，$\|u_n-v_n\|_{(M)}\geqslant\varepsilon_0$。最后由

$$\rho_M\left(\frac{u_n+v_n}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)=\int_{T_0} M\left(t, \frac{a\|x_n+y_n\|}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)d\mu\geqslant\int_{T_0} M(t,a)d\mu=1$$

可知 $\|u_n+v_n\|_{(M)}\geqslant 2\left(1-\frac{1}{n}\right)$，与 (1) 相矛盾。

$\lim\limits_{c\to 0}\int_T M(t, p_{\varepsilon,c}(t))d\mu=0$的证明与定理5.8的相应部分基本相仿。再由定理5.13便知$e(t)=0$ $(\mu-a\cdot e\cdot)$。

(2) $\Rightarrow$ (3) 取 $c>0$ 充分小使$\int_T M(t, p_{\varepsilon,c}(t))d\mu<\varepsilon$，再令$f(t)=p_{\varepsilon,c}(t)$，$\delta=c$，由$p_{\varepsilon,c}(t)$的定义即可得知(*)成立。

(3) ⇒ (1) 对任给 $r>0$，由命题5.6，存在正数 $h<1$ 使 $\|z\|_{(M)}\geqslant r$ 时 $\rho_M(z)\geqslant h$. 对 $a=\frac{h}{3}$，选定满足命题5.5中的$\varepsilon>0$ 并不妨假定$\varepsilon<\frac{h}{3}$.再对此 $\varepsilon>0$ 选取满足(*)中条件的 $f(t)$ 和 $\delta\in(0,1)$. 最后取正数η使 $\rho_M(z)\leqslant 1-\frac{h}{3}\min(\varepsilon,\delta)$ 时 $\|z\|_{(M)}<1-\eta$.

对任何 u, $v\in S(L_M{}^*)$, $\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{(M)}\geqslant r$, 则 $\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right)\geqslant h$.记

$$T_1=\{t\in T:\|u(t)-v(t)\|\leqslant a\max(\|u(t)\|,\ \|v(t)\|)\}$$

$T_2=T\backslash T_1$,则由$M(t,u)$的凸性

$$\int_{T_1}M\left(t,\frac{\|(t)-v(t)\|}{2}\right)d\mu\leqslant\int_{T_1}M\left(t,\frac{a\|u(t)\|+a\|v(t)\|}{2}\right)d\mu$$

$$\leqslant\frac{a}{2}\int_{T_1}[M(t,\|u(t)\|)+M(t,\ \|v(t)\|)]d\mu\leqslant a=\frac{h}{3}$$

令

$$E=\{t\in T_2:|\|u(t)\|-\|v(t)\||\leqslant f(t)\}$$

$F=T_2\backslash E$, 即得

$$\int_E M\left(t,\frac{\|u(t)-v(t)\|}{2}\right)d\mu\leqslant\int_E M\left(t,\frac{1}{2}f(t)\right)d\mu<\varepsilon<\frac{h}{3}$$

于是

$$\int_F\frac{1}{2}[M(t,\|u(t)\|)+M(t,\ \|v(t)\|)]d\mu$$

$$\geqslant\int_F M\left(t,\frac{\|u(t)-v(t)\|}{2}\right)d\mu=\rho_M\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

$$-\int_{T_1\cup E}M\left(t,\frac{\|u(t)-v(t)\|}{2}\right)d\mu>h-\frac{2}{3}h=\frac{1}{3}h$$

命

$$F_1=\{t\in F:\|u(t)+v(t)\|\leqslant(1-\varepsilon)(\|u(t)\|+\|v(t)\|)\}$$

$F_2=F\backslash F_1$，那么由 T_1，T_2，E，F，F_1，F_2 的定义，$t\in F_2$时

$$\|u(t)-v(t)\|>a\max(\|u(t)\|,\|v(t)\|)$$

$$\|u(t)+v(t)\|>(1-\varepsilon)(\|u(t)\|+\|v(t)\|)$$

且$|\|u(t)\|-\|v(t)\||>f(t)$，于是由$u(t),v(t)$的选法，还有

$$|\|u(t)\|-\|v(t)\||\geqslant\varepsilon\max(\|u(t)\|,\|v(t)\|)$$

从而由δ和$f(t)$的取法

$$\int_F M\left(t,\frac{\|u(t)+v(t)\|}{2}\right)d\mu\leqslant\int_{F_1}M\left(t,\frac{1-\varepsilon}{2}[\|u(t)\|+\|v(t)\|]\right)d\mu$$

$$+\int_{F_2}\frac{1-\delta}{2}[M(t,\|u(t)\|)+M(t,\|v(t)\|)]d\mu$$

$$\leqslant\frac{1-\min(\varepsilon,\delta)}{2}\int_F[M(t,\|u(t)\|)+M(t,\|v(t)\|)]d\mu$$

故

$$\rho_M\left(\frac{u+v}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\int_{T\setminus F}[M(t,\|u(t)\|)+M(t,\|v(t)\|)]d\mu$$

$$+\frac{1}{2}(1-\min(\varepsilon,\delta))\int_F[M(t,\|u(t)\|)+M(t,\|v(t)\|)]d\mu$$

$$=\frac{1}{2}[\rho_M(u)+\rho_M(v)]-\frac{1}{2}\min(\varepsilon,\delta)\int_F[M(t,\|u(t)\|)$$

$$+M(t,\|v(t)\|)]d\mu\leqslant1-\frac{1}{3}h\min(\varepsilon,\delta)$$

由此得到 $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{(M)}\leqslant1-\eta$.这表明$L_M{}^*$是一致凸的。

§7 Musielak-Orlicz空间的复端点、复严格凸和复一致凸性

本节恒假定X是复 Banach 空间，因此相应的 Musielak-Orlicz 空间$L_M{}^*$是复 Banach 空间。

定义 5.5 设A是复 Banach 空间Y的凸子集，C 为复数域，

$x_0\in A$. 如果$\{x_0+\lambda y:\lambda\in C,|\lambda|\leqslant 1\}\subset A$蕴涵$y=\theta$，就说$x_0$是$A$的一个复端点。

定义 5.6 如若复Banach空间Y的单位球面上的每一点都是$U(Y)$的复端点，就称Y是复严格凸的。

定义 5.7 设Y为复 Banach 空间。假如对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得对任何x，$y\in Y$，$\lambda\in C$，只要$\|y\|\geqslant\varepsilon$，$|\lambda|\leqslant 1$，$\|x+\lambda y\|\leqslant 1$，就有$\|x\|<1-\delta$。那么称$Y$为复一致凸空间。

命题 5.7 设Y是复 Banach 空间，则下列性质等价

(1) Y是复严格凸的；

(2) 对任意x，$y\in Y$，如果$\|x+\lambda y\|\leqslant\|x\|$对所有$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$成立，则$y=\theta$；

(3) 对任意x，$y\in Y$，如果$\frac{1}{2}\|x+\lambda y\|+\frac{1}{2}\|x-\lambda y\|=\|x\|$对所有$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$ 成立，则$y=\theta$。

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 当$x=\theta$时 (2) 显然成立。若$x\neq\theta$，则$\|x+\lambda y\|\leqslant\|x\|$对所有$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$成立时，$\left\|\frac{x}{\|x\|}+\lambda\frac{y}{\|x\|}\right\|\leqslant 1$对所有$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$成立。由 (1) 即知$y=\theta$。

(2) $\Rightarrow$ (3) 设x，$y\in Y$并对所有的$\lambda\in C$，$|\lambda|=1$，有$\frac{1}{2}\|x+\lambda y\|+\frac{1}{2}\|x-\lambda y\|=\|x\|$。取$f\in X^*$，$\|f\|=1$且$f(x)=\|x\|$。则当$|\lambda|\leqslant 1$时

$$
\begin{aligned}
2\|x\|&=2f(x)=2\mathrm{Re}f(x)=\mathrm{Re}f(x+\lambda y)+\mathrm{Re}f(x-\lambda y)\\
&\leqslant|f(x+\lambda y)|+|f(x-\lambda y)|\leqslant\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|=2\|x\|
\end{aligned}
$$

所以

$$\mathrm{Re}f(x+\lambda y)+\mathrm{Re}f(x-\lambda y)=\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|$$

再由

$$\mathrm{Re}f(x\pm\lambda y)\leqslant|f(x\pm\lambda y)|\leqslant\|x\pm\lambda y\|$$

得

$$\mathrm{Re}f(x+\lambda y)=|f(x+\lambda y)|=\|x+\lambda y\|$$

这说明

$$Im[f(x)+\lambda f(y)]=Im\lambda f(y)=0$$

由 λ 的任意性，可知 $f(y)=0$，于是又有 $\|x+\lambda y\|=\|x\|$。结合（2）得$y=\theta$。

（3）$\Rightarrow$（1）设 $x\in S(Y)$。若存在 $y\in Y$ 使得 $|\lambda|\leqslant 1$ 时恒有$\|x+\lambda y\|\leqslant 1$，则也有$\|x-\lambda y\|\leqslant 1$，于是

$$2=2\|x\|\leqslant\|x+\lambda y\|+\|x-\lambda y\|\leqslant 2$$

顾及（3）得知$y=\theta$。这表明x是$U(Y)$的复端点，从而知Y是复严格凸的。

命题 5.8 复 Banach 空间Y为复一致凸的，当且仅当对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得$x,y\in Y$且

$$\|y\|\geqslant\varepsilon\max(\|x+y\|,\|x-y\|,\|x+iy\|,\|x-iy\|)$$

时恒有

$$\|x\|\leqslant\frac{1-\delta}{4}(\|x+y\|+\|x-y\|+\|x+iy\|+\|x-iy\|)$$

证 充分性明显。今证必要性。用反证法。设有$\varepsilon_0>0$，$x_n,y_n\in Y$满足$\|y_n\|\geqslant\varepsilon_0$

$$\max\{\|x_n+y_n\|,\ \|x_n-y_n\|,\|x_n+iy_n\|,\|x_n-iy_n\|\}=1$$

且

$$\|x\|\leqslant\frac{1}{4}(\|x_n+y_n\|+\|x_n-y_n\|+\|x_n+iy_n\|+\|x_n-iy_n\|)-\frac{1}{n}$$

对每个x_n，取$f_n\in X^*$使$\|f_n\|=1$，$f_n(x_n)=\|x_n\|$，则有

$$4\|x_n\|=4f_n(x_n)=4\mathrm{Re}f_n(x_n)$$
$$=\mathrm{Re}f_n(x_n+y_n)+\mathrm{Re}f_n(x_n-y_n)+\mathrm{Re}f_n(x_n+iy_n)+\mathrm{Re}f_n(x_n-iy_n)\leqslant|f_n(x_n+y_n)|+|f_n(x-y_n)|+|f_n(x_n+iy_n)|+|f_n(x_n-iy_n)|\leqslant\|x_n+y_n\|+\|x_n-y_n\|+\|x_n+iy_n\|+\|x_n-iy_n\|$$
$$\leqslant 4\|x_n\|+\frac{4}{n}=\mathrm{Re}f_n(x_n+y_n)$$
$$+\mathrm{Re}f_n(x_n-y_n)+\mathrm{Re}f_n(x_n+iy_n)+\mathrm{Re}f_n(x_n-iy_n)+\frac{4}{n}$$

联系$|f_n(x_n+ky_n)|\leqslant\|x_n+ky_n\|$且

$$\mathrm{Re}f_n(x_n+ky_n)\leqslant|f_n(x_n+ky_n)| \quad (k=1,-1,i,-i)$$

得$|f_n(x_n+ky_n)|\geqslant\|x_n+ky_n\|-\dfrac{4}{n}$且

$$|f_n(x_n+ky_n)|\leqslant\mathrm{Re}f_n(x_n+ky_n)+\frac{4}{n}$$

由此可推算出

$$\mathrm{Im}f_n(x_n+ky_n)=\mathrm{Im}kf_n(y_n)\leqslant\left(\frac{8}{n}\mathrm{Re}f_n(x_n+ky_n)+\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{\frac{12}{n}}$$

$(k=1,-1,i,-i)$．这说明$|\mathrm{Re}f_n(y_n)|\leqslant\sqrt{\dfrac{12}{n}}$，$|\mathrm{Im}f_n(y_n)|\leqslant\sqrt{\dfrac{12}{n}}$，因此$|f_n|\leqslant\sqrt{\dfrac{24}{n}}$．于是又有

$$\|x_n+ky_n\|-\frac{4}{n}\leqslant|f_n(x_n+ky_n)|\leqslant|f_n(x_n)|+|f_n(ky_n)|$$

$$=\|x_n\|+|f_n(y_n)|\leqslant\|x_n\|+\sqrt{\frac{24}{n}} \quad (k=1,-1,i,-i)$$

在上式中对k取最大值，得

$$\|x_n\|\geqslant1-\frac{4}{n}-\sqrt{\frac{24}{n}}$$

$(n=1,2,\cdots)$．与Y的复一致凸矛盾．

定理 5.15 $x\in U(L_M{}^*)$是$U(L_M{}^*)$的端点的充要条件是

(1) $\lim\limits_{l\to1^-}\rho_M(lx)=1$或于$T$上几乎处处有 $\|x(t)\|=E(t)$；

(2) 对任意$L_M{}^*$中非零元y有$\mu G_{xy}=0$．

其中

$$G_{xy}=\{t\in T: y(t)\neq\theta; \forall\lambda\in C, |\lambda|\leqslant 1, M_0(t,\|x(t)\|)$$
$$=\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)+\lambda y(t)\|)+\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)-\lambda y(t)\|)\}$$

证 充分性．先设$\rho_{M_0}(x)=\lim\limits_{l\to 1^-}\rho_M(lx)=1$．对 $y\in L_M{}^*$，如果$\|x+\lambda y\|_{(M)}\leqslant 1$对所有 $\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$ 成立，则由命题 5.4，$\rho_{M_0}(x+\lambda y)\leqslant 1$，从而

$$1=\rho_{M_0}(x)=\int_T M_0(t,\|x(t)\|)d\mu$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_T M_0(t,\|x(t)+\lambda y(t)\|)d\mu+\frac{1}{2}\int_T M_0(t,\|x(t)-\lambda y(t)\|)d\mu$$
$$=\frac{1}{2}\rho_{M_0}(x+\lambda y)+\frac{1}{2}\rho_{M_0}(x-\lambda y)\leqslant 1$$

于是由$M_0(t,u)$的凸性，对几乎所有的$t\in T$

$$M_0(t,\|x(t)\|)=\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)+\lambda y(t)\|)$$
$$+\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)-\lambda y(t)\|)$$

对所有$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$成立．因此由 (2)，$y(t)=\theta$ 于T上μ-$a\cdot e\cdot$成立，即有$y=\theta$．这说明x是$U(L_M{}^*)$的复端点．

再设 $\|x(t)\|=E(t)$ 于 T 上μ-$a\cdot e\cdot$成立．对 $y\in L_M{}^*$，如果$\|x+\lambda y\|_{(M)}\leqslant 1$ 对所有$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$ 成立，则由命题 5.4，在 T 上μ-$a\cdot e\cdot$成立

$$\|x(t)+\lambda y(t)\|\leqslant E(t)=\|x(t)\|$$

于是μ-$a\cdot e\cdot$有

$$\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)+\lambda y(t)\|)+\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)-\lambda y(t)\|)$$
$$\leqslant M_0(t,\|x(t)\|)$$

再由$M_0(t,u)$ 的凸性知上式两边 μ-$a\cdot e\cdot$相等．从而由 (2) 可知$y=\theta$，即x是$U(L_M{}^*)$的复端点．

必要性．(1) 的必要性的证明与定理 5.12之 (1) 证明雷同．若 (2) 不真，则有$L_M{}^*$中非零元y_0使得$\mu G_{xy_0}>0$．记

$$H'=\{t\in G_{xy_0}:\|x(t)\|<e(t)\}$$

$$H''=\{t\in G_{xy_0}:\|x(t)\|\geqslant e(t)\}$$

则 $G_{xy_0}=H'\cup H''$．若$\mu H'>0$，则应有$r>0$使得

$$E=\{t\in T:\|x(t)\|+r<e(t)\}$$

非零集．取$z_0\in X$使$\|z_0\|=r$，令 $z(t)=z_0\chi_E$，则 $z\in L_M{}^*, z\neq\theta$且$|\lambda|\leqslant 1$时

$$M_0(x+\lambda z)\leqslant\int_E M_0(t,\|x(t)\|+r)d\mu+\int_{T\setminus E}M_0(t,\|x(t)\|)d\mu$$
$$\leqslant\rho_{M_0}(x)\leqslant 1$$

从而$\|x+\lambda z\|_{(M)}\leqslant 1$，即$x$不是$U(L_M{}^*)$的复端点．

若$\mu H'=0$，则$\mu H''>0$．注意对几乎所有的 $t\in T$，$M(t,u)$ 在$[e(t),E(t))$ 上是严格增的，联系G_{xy_0}和H''的定义，知对几乎所有$t\in H''$有

$$\|x(t)\|=\frac{1}{2}\|x(t)+\lambda y_0(t)\|+\frac{1}{2}\|x(t)-\lambda y_0(t)\|$$

$(|\lambda|\leqslant 1)$．仿照命题5.7中 (2) ⇒ (3) 的推导，上式蕴涵

$$\|x(t)\|=\|x(t)+\lambda y_0(t)\|\quad(|\lambda|\leqslant 1)$$

命$z(t)=y_0(t)\chi_{H''}(t)$，则得到$z\in L_M{}^*$，$z\neq\theta$ 且 $\rho_{M_0}(x+\lambda z)=\rho_{M_0}(x)\leqslant 1$，因此$x$也不是$U(L_M{}^*)$的复端点．

定理 5.16 $L_M{}^*$为复严格凸的充要条件是

(1) $M(t,u)$满足Δ条件；

(2) X是复严格凸的；

(3) $e(t)=0$ 于T上μ-$a.e.$成立．

证 充分性．设$x\in S(L_M{}^*)$，须说明x是$U(L_M{}^*)$ 的复端点，这只须验证定理5.15中的 (1)，(2) 成立．显然条件 (1) 蕴涵定理5.15中的 (1)．设$y\in L_M{}^*$，由 (3)，对几乎所有 $t\in G_{xy}$，

有

$$\|x(t)\|=\frac{1}{2}\|x(t)+\lambda y(t)\|+\frac{1}{2}\|x(t)-\lambda y(t)\| \quad (|\lambda|\leqslant 1)$$

再由（2）和命题5.7可知此式对所有的 $y(t)\neq\theta$ 都不成立，从而得到$\mu G_{xy}=0$，即定理5.15中的（2）成立.

必要性.（1）由定理5.16和定理5.9的（5）立即可得.

若（2）不真，则有 $u\in X$, $\|u\|=1$, $v\in X$, $\|v\|\neq 0$ 使得 $|\lambda|\leqslant 1$时成立$\|u+\lambda v\|\leqslant 1$.取充分大的实数$a$使得$\int_T M(t,a)d\mu\geqslant 1$，因（1）已获证，故可选取$T_0\subset T$满足

$$\int_{T_0} M(t,a)d\mu=1$$

定义

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}(au,av), & t\in T_0\\ (\theta,\theta), & t\in T\setminus T_0\end{cases}$$

则x, $y\in L_M{}^*,\rho_M(x)=1$，从而$\|x\|_{(M)}=1$. 又 $t\in T_0$ 时

$$\|x(t)+\lambda y(t)\|=a\|u+\lambda v\|\leqslant a=\|x(t)\|$$

故对μ-$a.e.$ $t\in T_0$有

$$M_0(t,\|x(t)\|)\leqslant\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)+\lambda y(t)\|)+\frac{1}{2}M_0(t,\|x(t)-\lambda y(t)\|)\leqslant M_0(t,\|x(t)\|)$$

这表示$\mu G_{xy}=\mu T_0>0$，于是由定理5.15知，x非$U(L_M{}^*)$的端点，与题设相矛盾.

若（3）不真，则可选$b>0$和$T_0\subset T$使

$$\int_{T_0} M_0(t,b)d\mu=1$$

且

$$\mu(\{t\in T:e(t)>0\}\setminus T_0)>0$$

今取 $w\in X$, $\|w\|=b$, $v_0\in X$, $\|v_0\|=\frac{1}{2}$.定义

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}(w,0), & t\in T_0\\ (0,e(t)v_0), & t\in\{t\in T:e(t)>0\}\setminus T_0\\ (0,\ 0), & \text{其他处}\end{cases}$$

则显然x，$y\in L_M{}^*$，$\|x\|_{(M)}=1$，$\|y\|_{(M)}>0$，但对任何$\lambda\in C$，$|\lambda|\leqslant 1$

$$\rho_{M_0}(x+\lambda y)=\int_{T_0}M(t,b)d\mu=1$$

因而$\{x+\lambda y:|\lambda|\leqslant 1\}\subset U(L_M{}^*)$，与定理条件不符.

定理 5.17 $L_M{}^*$为复一致凸空间的充要条件是

(1) $M(t,u)$满足Δ条件；

(2) $e(t)=0$ μ-$a\cdot e\cdot$成立；

(3) X是复一致凸空间.

证 充分性. 由命题5.6，只需证明 $L_M{}^*$ 关于模是复一致凸的.对每个$\varepsilon\in(0,1)$，由（3）及命题5.8，存在$\delta>0$使得 $x,y\in X$

$$\|y\|\geqslant\frac{\varepsilon}{8}\max_k\|x+ky\|, \quad (k=\pm 1,\pm i)$$

时成立

$$\|x\|\leqslant\frac{1-\delta}{4}\sum_k\|x+ky\| \qquad (k=\pm 1,\pm i)$$

对任给x，$y\in L_M{}^*$，$\rho_M(y)\geqslant\varepsilon$，$\rho_M(x+\lambda y)\leqslant 1$（$|\lambda|\leqslant 1$），命

$$T_1=\{t\in T:\|y(t)\|\geqslant\frac{\varepsilon}{8}\max_k\{\|x(t)+ky(t)\|,k=\pm 1,\pm i\}\}$$

则

$$\int_{T\setminus T_1}M(t,\|y(t)\|)d\mu\leqslant\frac{\varepsilon}{8}\int_{T\setminus T_1}M\left(t,\frac{8}{\varepsilon}\|y(t)\|\right)d\mu$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{8}\sum_k\int_{T\setminus T_1}M(t,\|x+ky\|)d\mu\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \quad (k=\pm 1,\pm i)$$

所以由$\sum_k\|y(t)+kx(t)\|=\sum_k\|x(t)+\frac{1}{k}y(t)\|=\sum_k\|x(t)+ky(t)\|$

得

$$\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\int_{T_1}M(t,\|y(t)\|)d\mu\leqslant\int_{T_1}M\left(t,\frac{1}{4}\sum_k\|x(t)+ky(t)\|\right)d\mu$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k}\int_{T_1}M(t,\|x(t)+ky(t)\|)d\mu \qquad (k=\pm 1,\pm i)$$

结合δ的取法和T_1的定义，有

$$\rho_M(x)\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k}\int_{T\setminus T_1}M(t,\|x(t)+ky(t)\|)d\mu+$$

$$\frac{1-\delta}{4}\sum_{k}\int_{T_1}M(t,\|x(t)+ky(t)\|)d\mu$$

$$\leqslant 1-\frac{\delta}{4}\sum_{k}\int_{T_1}M(t,\|x(t)+ky(t)\|)d\mu\leqslant 1-\frac{\delta}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

从而得知$L_M{}^*$的复一致凸性。

必要性。由定理 5.16，只需证 (3)。若 (3) 不真，则有 $\varepsilon_0>0$ 及 x_n，$y_n\in X$ 满足 $\|x_n+\lambda y_n\|\leqslant 1$ $(|\lambda|\leqslant 1)$，$\|y_n\|\geqslant\varepsilon_0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=1$。由于 (1) 成立，可选$a>0$和$T_0\subset T$ 使

$$\int_{T_0}M(t,a)d\mu=1$$

定义

$$(x_n(t),y_n(t))=\begin{cases}(ax_n,ay_n), & \text{当 } t\in T_0 \text{ 时}\\ (0,\ 0), & \text{当} t\in T\setminus T_0\text{时}\end{cases}$$

则由条件 (2)

$$\rho_M(y_n)\geqslant\int_{T_0}M(t,a\varepsilon_0)d\mu>0$$

以及

$$\rho_M(x_n+\lambda y_n)=\int_{T_0}M(t,\|x_n+\lambda y_n\|)d\mu$$

$$\leqslant\int_{T_0}M(t,a)d\mu=1 \qquad (|\lambda|\leqslant 1)$$

再结合

$$\lim_{n\to\infty}\rho_M(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{T_0}M(t,a\|x_n\|)d\mu$$

$$=\int_{T_0}M(t,a)d\mu=1$$

便知$L_M{}^*$不是复一致凸的.

附记 §1中矢值 Orlicz 空间概念由 M·S·Skaff 提出.但其关于定理 5.2和定理 5.3 的证明有错误（见陈述涛的[3]）. 本章§1—§3的全部结果均属于陈述涛[4—6].

关于Musielak-Orlicz空间,波兰波兹南泛函工作者近年来作了大量工作.有兴趣的读者可参看文献[14—38]. H·Hudzik[15,16]最先讨论 Musielak-Orlicz 空间的严格凸性和一致凸性，他在X可分的限制下给出了这两种凸性的判别准则. 但[16]的证明有误（见陈述涛的[7]）.本章 §4—§5 的结果全部属于吴从炘、陈述涛[8]，§6的结果属于陈述涛[7].

复端点和复凸性是 V. Istratescu, I. Istratescu[10] 和 J.Globevnik[11]引入的。文[11]指出了$L_1(S,\sigma,\mu)$是复一致凸的. 本章§7的结果均属于吴从炘、孙慧颖[12]和孙慧颖[13].

参 考 文 献

[1] M.S.Skaff, Generalized N-functions, vector value Orlicz spaces, Pacific J. Math., 28(1969), 193—206.

[2] ——, 同上, 28(1969),414—430.

[3] 陈述涛，一类广义奥尔里奇空间的 Δ_2 条件，自然杂志，4(1981),793.

[4] ——,On vector valued Orlicz spaces,数学年刊,5B(1984), 293—304.

[5] ——, Extreme points and strict convexity of vector valued Orlicz spaces（待发表）.

[6] ——, 矢值 Orlicz 空间的一致凸性，纯粹数学与应用数学, (1986) ,no.3.

[7] ——, 关于 Musielak-Orlicz 空间的一致凸性（待发表）.

[8] 吴从炘、陈述涛，Musielak-Orlicz 空间的端点与严格凸，东北数学，2 (1986) ,no.1.

[9] ——, Extreme points and rotundity of Musielak-

Orlicz sequence spaces（待发表）.

[10] V. Istratescu, I. Istratescu, On complex strictly convex spaces, J.Math. Anal. Appl.,70(1979), 423—429.

[11] J.Globevnik, On complex strict and uniform convexity, Proc. Amer. Math.Soc.,47(1975),175—178.

[12] 吴从炘、孙慧颖，关于 Musielak—Orlicz 空间的复端点与复严格凸，系统科学与数学（待发表）.

[13] 孙慧颖，关于 Musielak—Orlicz 空间的复一致凸性（待发表）.

[14] J.Musielak,«Orlicz spaces and modular spaces», Lecture Notes in Math.,1034, Springer-Verlag (1983) .

[15] H.Hudzik, Strict convexity of Musielak-Orlicz space with Luxemburg's norm, Bull. Acad.Polon.Sci. Math. 29(1981),235—247.

[16] ———, A criterion of uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm,同上,32(1984), 303—313.

[17] ———, Musielak—Orlicz spaces isomorphic to strict convex spaces,同上, 29(1981), 465—470.

[18] ———,Flat Musielak-Orlicz spaces under Luxemburg-'s norm,同上,32(1984),203—208.

[19] ———,Convexity in Musielak-Orlicz spaces,Hokkaido Math.J.,14(1985),no.1（待发表）.

[20] ———,On some equivalent conditions in Musielak-Orlicz spaces, Comment. Math., 24 (1984) , 57—64.

[21] ———, Uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg's norm, 同上, 23 (1983) , 21—32.

[22] ———, Musielak-Orlicz algebra（待发表）.

[23] H.Hudzik, J.Musielak, R. Urbanski, Some extensions of the Riez-Thorin theorem to generalized Orlicz spaces

$L_M^p(T)$, Comment. Math.,22(1980),43—61.

[24] A.Kaminska, Some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces of Bochner type, Supl. Rend. Circ.Math. Pal.（待发表）.

[25] ———, On some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces, 同上, 2(1984), no.5, 63—72.

[26] ———,Uniform rotundity of Musielak-Orlicz sequence spaces, J. Appr. Theory（待发表）.

[27] ———, Strict convexity of sequence Orlicz-Musielak spaces with Orlicz norm, J.Func. Anal., 50 (1983), 285—305.

[28] ———, Flat Orlicz-Musielak sequence spaces, Bull. Acad. Polon.sci. Math., 30(1982), 347—352.

[29] ———, On some compactness criterion for Orlicz subspace-$E_\phi(\Omega)$, Comment. Math., 22(1981),245—255.

[30] ———, On the translation in the Orlicz-Musielak sequence spaces,同上, 24 (1984), 77—84.

[31] A.Kaminska, H.Hudzik, On uniformly convexiable and B-convex Orlicz-Musielak spaces,同上（待发表）.

[32] R.Pluciennik, S. Szufla, Nonlinear Volterra integral equations in Orlicz spaces, Demonstratio Math., 17 (1984), 515—532.

[33] R.Pluciennik, On E_N-weak convergence and E_N-weak continuity in Orlicz spaces of vector valued function Fasci. Math.,13(1981),5—13.

[34] ———, On some criteria for compactness of sets in spaces $E_{\rho s}$, Comment. Math., 21(1979), 207—217.

[35] ———, On some properties of the superposition operator in generalized Orlicz spaces of vector-valued functions, 同上（待发表）.

[36] ———, Boundness of the superposition operator in generalized Orlicz spaces of vector-valued function, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. (待发表).

[37] J. Ciemnoczolowski, W.Orlicz,On some class of vector valued functions of bounded weak variation, 同上,31 (1983) ,335—344.

[38] J.Musielak, On sequentially M-integrable distributions Studia Math.,77(1984),255—260.

第六章　Orlicz 空间几何的应用

Orlicz 空间的几何性质，不但能揭示空间的内在结构，而且对空间中算子的性质有微妙的影响．除此之外，变化甚多的几何技巧又为某些其他问题的研究提供了有效的工具．

本章讨论 Orlicz 空间的凸性、光滑性、H 性质等几何性质在最佳逼近中的应用，并用几何技巧考察预报列的收敛性与非二次指标的最优控制问题，最后给出最小 Orlicz 范数控制的表示．

§1　最佳逼近元的判据

设X为 Banach 空间，M为X的子集，$x\in X$，如果有$y\in M$满足

$$\|x-y\|=\inf_{m\in M}\|x-m\|$$

则称 y 为 x 在M中的最佳逼近元，记为 $y=\pi(x|M)$．集值映射 $P_M:x\to\{y:y=\pi(x|M)\}$称为度量投影．特别，单值的度量投影称为最佳逼近算子，记为$\pi(\cdot|M)$．

最佳逼近元的判据是最佳逼近的基本问题之一，它具有理论和应用的双重意义。例如，在最优控制理论中，某些类型最优控制的刻画，就归结为适当的最佳逼近元的判据．

本节讨论 L^*_M与$L^*_{(M)}$中凸集C中最佳逼近元的特征，推广了L^p中熟知的结果．

定理 6.1　设 $M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$ 连续，C 为 L^*_M 中凸集，$u_0\in C$，$u\in L^*_M|C$，则 $u_0=\pi(u|C)$ 的充分必要条件是：对任意$w\in C$，有

$$\int_G [u_0(t)-w(t)]p(k|u(t)-u_0(t)|)\mathrm{sign}(u(t)$$

$$-u_0(t))dt \geqslant 0 \tag{6.1}$$

这里 k 满足 $\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$.

证 必要性

若 $u_0=\pi(u|C)$, 对 $w\in C$, 令

$$h(\tau)=(1-\tau)u_0+\tau w,\quad \tau\in[0,1]$$

由C的凸性, $h(\tau)\in C$, $\tau\in[0,1]$. 再令

$$\Psi(\tau)=\|h(\tau)-u\|_M=\|(u_0-u)+\tau(w-u_0)\|_M,\quad \tau\in[0,1]$$

则 $\Psi(\tau)\geqslant\Psi(0)$, $\tau\in[0,1]$.

由于 $M(u)\in\Delta_2$、$p(u)$ 连续, 应用定理 2.16, 便知 $\|\cdot\|_M$ Gateaux 可微, 故由定义0.32之后的注, 有

$$0\leqslant\lim_{\tau\to 0}\frac{\Psi(\tau)-\Psi(0)}{\tau}$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{\|(u_0-u)+\tau(w-u_0)\|_M-\|u_0-u\|}{\tau}$$

$$=g(u_0-u,\ w-u_0)=\langle w-u_0,\ r(u_0-u)\rangle$$

再由定理2.16和定理2.16证明中 (1), 存在 $k>0$, 满足

$$\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$$

$$r(u_0-u)=p(k|u_0-u|)\operatorname{sign}(u_0-u)$$

从而

$$\int_G [u_0(t)-w(t)]p(k|u(t)-u_0(t)|)\operatorname{sign}(u(t)$$

$$-u_0(t))dt\geqslant 0$$

充分性

由于 $u-u_0\neq 0$, 应用定理2.16与定理2.16之证

$$\|u-u_0\|_M=\int_G [u(t)-u_0(t)]p(k|u(t)$$

$$-u_0(t)|)\operatorname{sign}(u(t)-u_0(t))dt$$

这里k满足

$$\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$$

从而对 $w\in C$，由 (6.1) 式和 Hölder 不等式，有

$$\|u-u_0\|_M\leqslant\int_G [u(t)-w(t)]p(k|u(t)-u_0(t)|)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))dt$$
$$\leqslant\|u-w\|_M\|p(k|u-u_0|)\|_{(N)}=\|u-w\|_M$$

于是 $u_0=\pi(u|C)$。

定理 6.2 设 $M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$ 连续，C 为 $L^*_{(M)}$ 中凸集，$u_0\in C$，$u\in L^*_{(M)}|C$，则 $u_0=\pi(u|C)$ 的充分必要条件是：对任意 $w\in C$

$$\int_G [u_0(t)-w(t)]p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))dt\geqslant 0 \tag{6.2}$$

证 必要性

因为 $M(u)\in\Delta_2$、$p(u)$连续，由定理2.15，便知 L^*_M 光滑，且 u_0-u处支撑泛函为

$$r(u_0-u)=ap\left(\frac{|u_0-u|}{\|u_0-u\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u_0-u) \tag{6.3}$$

这里 $$a^{-1}=\int_G \frac{|u_0(t)-u(t)|}{\|u_0-u\|_{(M)}}p\left(\frac{|u_0(t)-u(t)|}{\|u_0-u\|_{(M)}}\right)dt>0 .$$

与定理6.1充分性的证明一样，对任意$w\in C$

$$0\leqslant\lim_{\tau\to 0}\frac{\|(u_0-u)+\tau(w-u_0)\|_{(M)}-\|u_0-u\|_{(M)}}{\tau}$$
$$=\langle w-u_0,\ r(u-u_0)\rangle$$
$$=\int_G [w(t)-u_0(t)]ap\left(\frac{|u_0(t)-u(t)|}{\|u_0-u\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u_0(t)-u(t))dt$$

从而（6.2）式成立．

充分性

对任意 $w\in C$，由（6.3）、（6.2）式与 Hölder 不等式

$$\|u-u_0\|_{(M)}=\langle u-u_0,\ r(u-u_0)\rangle$$

$$=\int_G [u(t)-u_0(t)]p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)a\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))dt$$

$$\leqslant\int_G [u(t)-w(t)]ap\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))dt$$

$$\leqslant\|u-w\|_{(M)}\left\|ap\left(\frac{|u-u_0|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\right\|_N$$

$$=\|u-w\|_{(M)}$$

于是 $u_0=\pi(u|C)$．

推论 6.1 设 $M(u)\in\Delta_2$、$p(u)$连续，L为 L^*_M 的线性子空间，$u_0\in L$，$u\in L^*_M/L$，则 $_0=\pi(u|L)$的充分必要条件为：对任意 $w\in L$

$$\int_G w(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))dt=0 \quad (6.4)$$

这里 k 满足 $\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$．

证 必要性

由定理 6.1，对 $w\in L$，有

$$\int_G [u_0(t)-w(t)]p(k|u(t)-u_0(t)|)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))dt\geqslant 0 \quad (6.5)$$

这里 k 满足 $\int_G N[p(k|u(t)-u_0(t)|)]dt=1$．

又由L为线性集便知0与$2u_0$属于L，因而在（6.5）中将 w 换

为0或$2u_0$，其不等号不变，故

$$\int_G u_0(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)\text{sign}(u(t)-u_0(t))dt=0$$

从而

$$\int_G w(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)\text{sign}(u(t)-u_0(t))dt\leqslant 0$$

又因$-w\in L$，所以在上式中将w换为$-w$，其不等号不变，于是

$$\int_G w(t)p(k|u(t)-u_0(t)|)\text{sign}(u(t)-u_0(t))dt=0$$

充分性

因（6.4）式蕴涵（6.1）式，由定理6.1立即可得．

推论 6.2 设$M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$连续，L为$L^*_{(M)}$的线性子空间，$u_0\in L$，$u\in L^*_{(M)}\setminus L$，则$u_0=\pi(u|C)$的充分必要条件为：对任意$w\in L$

$$\int_G w(t)p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\text{sign}(u(t)-u_0(t))dt=0$$

证 由定理6.2推得．

推论 6.3 若C为$L^p(1<p<\infty)$中凸集，则$\varphi_0\in C$是$f\in L^p$在C内最佳逼近元的充分必要条件是：对任意$\varphi\in C$

$$\int_a^b[\varphi_0(t)-\varphi(t)]|f(t)-\varphi_0(t)|^{p-1}\text{sign}(f(t)-\varphi_0(t))dt\geqslant 0$$

证 由定理6.2推得．

推论 6.4 设F为$L^p(1<p<\infty)$的线性子空间，则$\varphi_0\in F$是$f\in L^p$在F内的最佳逼近元的充分必要条件是：对任意$\varphi\in F$

$$\int_a^b\varphi(t)|f(t)-\varphi_0(t)|^{p-1}\text{sign}(f(t)-\varphi_0(t))dt=0$$

证 由推论6.2 推得．

§2 最佳逼近算子的连续性与单调性

最佳逼近算子一般是非线性算子，因而研究其连续性与单调性是有意义的．

1974年，Brown[4] 举出反例，说明 Banach 空间X的自反，严格凸性不蕴涵算子$\pi(\cdot|C)$ 的连续性，这里 C 为X中闭凸集．1976年，J.Blatter[5] 证得：对于X中任何闭凸集 C，$\pi(\cdot|C)$ 存在的充分必要条件是X自反、严格凸．本节将证明，对于Orlicz空间，这一条件也蕴涵算子 $\pi(\cdot|C)$ 的连续性．

引理 6.1 设X为H严格凸 Banach 空间，C 为X中局部弱列紧闭凸集，则算子 $\pi(\cdot|C)$ 连续．

证 因 C 为局部弱列紧闭凸集，$\|\cdot\|$ 严格凸，易知算子 $\pi(\cdot|C)$ 在X上存在．

设 x，$x_n\in X(n=1,2,\cdots)$，$\|x_n-x\|\to 0$ $(n\to\infty)$，如果 $\|\pi(x_n|C)-\pi(x|C)\|\not\to 0$ $(n\to\infty)$，不妨设

$$\|\pi(x_n|C)-\pi(x|C)\|\geqslant\varepsilon_0>0 \quad (n=1,2,\cdots) \tag{6.6}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\big|\,\|\pi(x_n|C)-x_n\|-\|\pi(x|C)-x\|\,\big| \\
&\leqslant\begin{cases}\big|\,\|\pi(x|C)-x_n\|-\|\pi(x|C)-x\|\,\big|, \\ \qquad\qquad \text{当 } \|\pi(x_n|C)-x_n\|\geqslant\|\pi(x|C)-x\| \\ \big|\,\|\pi(x_n|C)-x_n\|-\|\pi(x_n|C)-x\|\,\big|, \\ \qquad\qquad \text{当 } \|\pi(x_n|C)-x_n\|<\|\pi(x|C)-x\|\end{cases} \\
&\leqslant\|x_n-x\|\to 0 \qquad (n\to\infty)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

可知$\{\pi(x_n|C)\}$为C中有界序列．于是由 C 的局部弱列紧性，有子列$\{\pi(x_{n_k}|C)\}$满足

$$\pi(x_{n_k}|C)\xrightarrow{w}y\in X \qquad (k\to\infty)$$

因为C为闭凸集，从而弱闭，故 $y\in C$．

又因

$$\pi(x_{n_k}|C)-x_{n_k}\xrightarrow{w}y-x \qquad (k\to\infty) \tag{6.8}$$

由范数的弱下半连续性、（6.8）、（6.7）式，我们有

$$\|y-x\|\leq \varliminf_{k\to\infty}\|\pi(x_{n_k}|C)-x_{n_k}\|$$

$$=\|\pi(x|C)-x\|$$

再由 $\pi(x|C)$的唯一性，有

$$y=\pi(x|C) \tag{6.9}$$

因而由（6.7）、（6.8）、（6.9）式，应用H性质即有

$$\pi(x_{n_k}|C)-x_{n_k}\to\pi(x|C)-x \qquad (k\to\infty)$$

亦即

$$\pi(x_{n_k}|C)\to\pi(x|C) \qquad (k\to\infty)$$

这与（6.6）相矛盾．

定理 6.3 设 $M(u)\in\Delta_2$ 且 $M(u)$严格凸，C为L_M^* 中局部弱列紧闭凸集，则 $\pi(\cdot|C)$ 连续．

证 因为$M(u)\in\Delta_2$,$M(u)$严格凸，由定理2.10，L_M^* 有H性质，从而H严格凸，于是由引理6.1推得$\pi(\cdot|C)$连续．

定理 6.4 对于L_M^* 中任意闭凸集C，算子 $\pi(\cdot|C)$ 连续的充分必要条件是L_M^* 自反、严格凸．

证 仅需证充分性

因L_M^* 自反、严格凸，故对 L_M^* 中任何闭凸集 C，$\pi(\cdot|C)$ 均存在．

L_M^* 自反、严格凸蕴含 L_M^* 中闭凸集C为局部弱列紧的，而且$M(u)\in\Delta_2$，$M(u)$严格凸，于是由定理6.3推得$\pi(\cdot|C)$连续．

下面讨论算子$\pi(\cdot|C)$的单调性．

当 $M(u)=\dfrac{|u|^p}{p}(1<p<\infty)$时，$L^*_M=L^p$，对$L^p$中任意闭凸格$C$，算子$\pi(\cdot|C)$为单调算子，即$u_1\geq u_2$ $a\cdot e$，蕴涵 $\pi(u_1|C)\geq\pi(u_2|C)$ $a\cdot e\cdot$（参见[8]），但当$M(u)$为一般N函数时，$\pi(\cdot|C)$不一定是单调算子．现举反例如下．

例 6.1 设 $G=[0,8]$，Σ为G中一切 Lebesgue 可测集全体

所构成的σ-代数，mes 表示 Lebesgue 测度．$\Sigma_1=\{\phi, G\}$，则Σ_1为Σ的σ-子格，关于Σ_1可测的函数必为常数函数．定义

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{5600} & 0\leqslant t<10\\ \dfrac{1}{112} & 10\leqslant t<50\\ \dfrac{3}{140} & 50\leqslant t<55\\ \dfrac{3}{112} & 55\leqslant t<57\\ \dfrac{5}{112} & 57\leqslant t<100\\ t & 100\leqslant t\end{cases}$$

则 $M(u)=\int_0^{|u|} p(t)dt$ 为 N 函数，而且 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$．

令

$$C=\{u: u\in L^*_{(M)},\ u(t)\text{关于}\Sigma_1\text{可测}\}$$

则C为$L^*_{(M)}$中由常数构成的闭凸格．

在G上定义函数

$$u(t)=\begin{cases}55 & 0\leqslant t<2\\ -10 & 2\leqslant t\leqslant 8\end{cases}$$

$$w(t)=\begin{cases}55 & 0\leqslant t<1\\ \dfrac{3285}{68} & 1\leqslant t<2\\ -10 & 2\leqslant t\leqslant 8\end{cases}$$

则 $u\geqslant w$，下面要证 $\pi(u|C)<\pi(w|C)$，从而 $\pi(\cdot|C)$ 不是单调算子．

首先证 $\|u-0\chi_G\|_{(M)}=1$，事实上

$$\int_G M(u(t))dt = 2M(55) + 6M(10)$$

$$= 2\left[\int_0^{10} \frac{t}{5600}dt + \frac{40}{112} + \frac{15}{140}\right] + 6\int_0^{10} \frac{t}{5600}dt$$

$$= 2\left(\frac{41}{112} + \frac{15}{140}\right) + \frac{6}{112} = 1$$

从而$\|u - 0\chi_G\|_{(M)} = \|u\|_{(M)} = 1$．

再证：对任意 $a>0$，$\|u - a\chi_G\|_{(M)}>1$．

如果 $0<a<5$，那么

$$\int_G M(|u(t) - a\chi_G(t)|)dt = 2M(55 - a) + 6M(10 + a)$$

$$= 2\left[M(55) - \frac{3}{140}a\right] + 6\left[M(10) + \frac{1}{112}a\right]$$

$$= 1 - \frac{6a}{140} + \frac{6a}{112} > 1$$

即有$\|u - a\chi_G\|_{(M)}>1$．假如 $a>5$，经过类似的计算，同样有上述结论．这样一来 $\pi(u|C)\leqslant 0$．

以下证明 $\pi(w|C)\geqslant \frac{35}{68}$，因而 $\pi(u|C)<\pi(w|C)$，于是完成证明．

设 $\alpha = \frac{65}{68}$、 $\beta = \frac{35}{68}$、 $\gamma = \frac{3285}{68}$，则

$$\int_G M\left(\frac{|w(t) - \beta\chi_G(t)|}{\alpha}\right)dt$$

$$= M\left(\frac{55 - \beta}{\alpha}\right) + M\left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha}\right) + 6M\left(\frac{10 + \beta}{\alpha}\right)$$

$$= M(57) + M(50) + 6M(1) = 1$$

于是 $\|w - \beta\chi_G\|_{(M)} = \alpha$

最后验证：对于任意 $b<\beta$，一定有$\|w-b\chi_G\|_{(M)}>a$．

如若 $-\frac{30}{68}<b<-\frac{35}{68}=\beta$，则

$$\int_G M\left(\frac{|w(t)-b\chi_G(t)|}{a}\right)dt$$

$$=M\left(\frac{55-b}{a}\right)+M\left(\frac{\gamma-b}{a}\right)+6M\left(\frac{10+b}{a}\right)$$

$$=M\left(\frac{55-\beta}{a}\right)+\frac{5}{112}\left(\frac{\beta-b}{a}\right)+M\left(\frac{\gamma-\beta}{a}\right)+\frac{3}{140}\left(\frac{\beta-b}{a}\right)$$

$$+6M\left(\frac{10+\beta}{a}\right)-\frac{6}{112}\left(\frac{\beta-b}{a}\right)$$

$$=1+\left(\frac{5}{112}+\frac{3}{140}-\frac{6}{112}\right)\left(\frac{\beta-b}{a}\right)>1$$

因而$\|w-b\chi_G\|_{(M)}>a$．类似的计算可以导出，当 $b\leqslant-\frac{30}{68}$时，也有$\|w-b\chi_G\|_{(M)}>a$，总之

$$\pi(w|C)\geqslant\beta=\frac{35}{68}$$

下面的定理给出$\pi(\cdot|C)$为单调算子的充分条件．

定理 6.5 设 $M(u)\in\Delta_2$，$p(u)$ 连续、严格增，u，$w\in L^*_{(M)}$，C为$L^*_{(M)}$中闭凸格．如果 $\mathrm{dist}(u,C)=\mathrm{dist}(w,C)$，则$u\geqslant w$ $a.e.\Rightarrow\pi(u|C)\geqslant\pi(w|C)a.e.$．

证 不妨设u、$w\overline{\in}C$．令 $u_0=\pi(u|C)$，$w_0\doteq\pi(w|C)$，$\overline{w}=u_0\vee w_0$，$[u_0<w_0]=\{t\in G:u_0(t)<w_0(t)\}$

$$w(\tau)=(1-\tau)u_0+\tau\overline{w}=u_0+\tau(w_0-u_0)\chi_{[u_0<w_0]}\quad\tau\in[0,1]$$
$$\Psi(\tau)=\|u-w(\tau)\|_{(M)}$$
$$=\|(u-u_0)+\tau(u_0-w_0)\chi_{[u_0<w_0]}\|_{(M)}\quad\tau\in[0,1]$$

因为 $u_0=\pi(u|C)$，$w(\tau)\in C$，$\tau\in[0,1]$，故

$$\Psi'(0) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Psi(t)-\Psi(0)}{\tau}$$

$$= \lim_{\tau\to 0}\frac{\|u-w(\tau)\|_{(M)}-\|u-u_0\|_{(M)}}{\tau}\geqslant 0$$

于是

$$\langle (u_0 - w_0)\chi_{[u_0<w_0]} \ , \ r(u-u_0)\rangle = \Psi'(0)\geqslant 0$$

此处$r(u-u_0)$为 $u-u_0$ 处的支撑泛函。由定理2.15，有 $\alpha>0$，使得

$$r(u-u_0) = \alpha p\left(\frac{|u-u_0|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u-u_0)$$

从而

$$\int_G \alpha p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))(u_0(t)$$

$$-w_0(t))\chi_{[u_0<w_0]}\ dt\geqslant 0$$

即有

$$\int_{[u_0<w_0]} p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(u(t)-u_0(t))(w_0(t)$$

$$-u_0(t))dt\leqslant 0 \tag{6.10}$$

类似地，设 $\bar{z}=u_0\wedge w_0$.

$$z(\tau)=(1-\tau)w_0+\tau\bar{z}=w_0+\tau(u_0-w_0)\chi_{[u_0<w_0]}$$

$$\phi(\tau)=\|w-z(\tau)\|_{(M)}$$

$$=\|(w-w_0)+\tau(w_0-u_0)\chi_{[u_0<w_0]}\|_{(M)}\quad \tau\in[0,1]$$

则得$\phi'(\tau)\geqslant 0$。与上同理，由定理 2.15，有 $\beta>0$ 满足

$$\int_G \beta p\left(\frac{|w(t)-w_0(t)|}{\|w-w_0\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}(w(t)-w_0(t))(w_0(t)$$

$$-u_0(t))\chi_{[u_0<w_0]}\ dt\geqslant 0$$

因而

$$\int_{[u_0<w_0]} p\left(\frac{|w(t)-w_0(t)|}{\|w-w_0\|_{(M)}}\right)\operatorname{sign}(w(t)-w_0(t))(w_0(t)$$

$$-u_0(t))dt \geqslant 0 \tag{6.11}$$

由（6.10）、(6.11)式，我们得到

$$\int_{[u_0<w_0]} p\left(\frac{|w(t)-w_0(t)|}{\|w-w_0\|_{(M)}}\right)\operatorname{sign}(w(t)-w_0(t))(w_0(t)$$

$$-u_0(t))dt$$

$$\geqslant \int_{[u_0<w_0]} p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\operatorname{sign}(u(t)-u_0(t))(w_0(t)$$

$$-u_0(t))dt \tag{6.12}$$

因为 $w(t)\leqslant u(t)$ $a.e.$，故在$[u_0<w_0]$上，$w(t)-w_0(t)<u(t)-u_0(t)$ $a.e.$，从而由已知条件：$\|u-u_0\|_{(M)}=\|w-w_0\|_{(M)}$，有

$$\frac{w(t)-w_0(t)}{\|w-w_0\|_{(M)}}<\frac{u(t)-u_0(t)}{\|u-u_0\|_{(M)}} \qquad a.e.$$

于是

$$p\left(\frac{|w(t)-w_0(t)|}{\|w-w_0\|_{(M)}}\right)\operatorname{sign}(w(t)-w_0(t))$$

$$<p\left(\frac{|u(t)-u_0(t)|}{\|u-u_0\|_{(M)}}\right)\operatorname{sign}(u(t)-u_0(t)) \qquad a.e.$$

再由（6.12）式立即可得

$$\operatorname{mes}([u_0<w_0])=0$$

即 $\pi(u|C)=u_0\geqslant w_0=\pi(w|C)$ $a.e.$

§3 预报算子列的收敛性

设 (Ω,Σ,p) 为概率空间，$\{\Sigma_n\}$为 Σ 的单调的 σ-子域列，$\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\cdots$，$\Sigma_\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$，或者$\Sigma_1\supset\Sigma_2\supset\cdots$，$\Sigma_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$，Doob鞅收敛定理指出：对$L^2(\Omega)$中每个随机变量$\xi$，有

$$\|E(\xi|\Sigma_n)-E(\xi|\Sigma_\infty)\|_{L^2}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

这里 $E(\xi|\Sigma_n)(n=1,2,\cdots,\infty)$为$\xi$在$\Sigma_n$上的条件期望．由概率论中定理：$E(\xi|\Sigma_n)=\pi(\xi|C_n)\quad(n=1,2,\cdots,\infty)$ 这里 $C_n=\{\eta\in L^2(\Omega):\eta$为$\Sigma_n$可测$\}$，而且成立

$$C_\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n(C_1\subset C_2\subset\cdots) \text{ 或 } C_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n \quad (C_1\supset C_2\supset\cdots)$$

Doob 鞅定理有各种不同形式的推广，本节将对自反、H 严格凸 Banach 空间X中单调闭凸集列$\{C_n\}$，证明广义的 Doob 定理，然后由 Orlicz 空间具有H性质的条件，推出自反、严格凸的 Orlicz 空间中预报算子列的极限定理．

设X为 Banach 空间，$\{C_n\}$为X中单调闭凸集列，如果 $C_1\supset C_2\supset C_3\supset\cdots$，令 $C_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$，记为 $C_n\downarrow C_\infty(n\to\infty)$；如果 $C_1\subset C_2\subset\cdots$，令 $C_\infty=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n}$，记为$C_n\uparrow C_\infty(n\to\infty)$．

定理 6.6 设X为自反，H严格凸 Banach空间，$\{C_n\}$为X中单调闭凸集列，如果 $C_n\downarrow C_\infty$ 或 $C_n\uparrow C_\infty(n\to\infty)$，则对任意 $x\in X$，有

$$\|\pi(x|C_n)-\pi(x|C_\infty)\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

证 (1) $C_n\uparrow C_\infty(n\to\infty)$，对任何 $x\in X$，如若该定理不真，不妨设

$$\|\pi(x|C_n)-\pi(x|C_\infty)\|\geqslant\varepsilon_0>0 \quad (n=1,2,\cdots) \tag{6.13}$$

由于 $\|x-\pi(x|C_1)\|\geqslant\|x-\pi(x|C_2)\|\geqslant\cdots\geqslant\|x-\pi(x|C_\infty)\|$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\pi(x|C_n)\|=r\geqslant\|x-\pi(x|C_\infty)\|$

如果出现 $r>\|x-\pi(x|C_\infty)\|$，则对一切 $n\geqslant1$，均有

$$\|x-\pi(x|C_n)\|\geqslant r>\|x-\pi(x|C_\infty)\| \tag{6.14}$$

因为 $\pi(x|C_\infty)\in C_\infty=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n}$，故有 $\{C_n\}$ 的子列 $\{C_{n_k}\}$，$x_{n_k}\in C_{n_k}\quad(k=1,2,\cdots)$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\|\pi(x|C_\infty)-x_{n_k}\|=0$$

从而存在k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时

$$\|\pi(x|C_\infty)-x_{n_k}\|<\frac{1}{2}[r-\|x-\pi(x|C_\infty)\|] \qquad (6.15)$$

于是当 $k\geqslant k_0$时，由（6.14）、（6.15）式，我们有

$$\|x-x_{n_k}\|\leqslant\|x-\pi(x|C_\infty)\|+\|\pi(x|C_\infty)-x_{n_k}\|<r$$

这与（6.14）式相矛盾。因此

$$\lim_{n\to\infty}\|x-\pi(x|C_n)\|=\|x-\pi(x|C_\infty)\| \qquad (6.16)$$

由于C_1非空，选 $x_0\in C_1$，对一切 $n\geqslant1$

$$\|\pi(x|C_n)\|\leqslant\|\pi(x|C_n)-x\|+\|x\|\leqslant\|x_0-x\|+\|x\|<\infty$$

即 $\{\pi(x|C_n)\}$ 为X中有界序列，因而由X自反，可选子列$\{\pi(x|C_{n_k})\}$，$y_0\in X$，满足

$$\pi(x|C_{n_k})\xrightarrow{w}y_0 \quad (k\to\infty) \qquad (6.17)$$

因为C_∞闭凸，从而弱闭，故 $y_0\in C_\infty$。再由范数的弱下半连续性，有

$$\|x-y_0\|\leqslant\lim_{k\to\infty}\|x-\pi(x|C_{n_k})\|=\|x-\pi(x|C_\infty)\|$$

顾及到X的严格凸性，便知

$$y_0=\pi(x|C_\infty) \qquad (6.18)$$

由（6.17）、（6.18）、（6.16）式，应用空间 X 的 H 性质，得到 $x-\pi(x|C_{n_k})\to x-\pi(x|C_\infty)$ $(k\to\infty)$，这与（6.13）式相矛盾。

(2) 设 $C_n\downarrow C_\infty$ $(n\to\infty)$，$x\in X$，假如有 $\varepsilon_0>0$，

$$\|\pi(x|C_n)-\pi(x|C_\infty)\|\geqslant\varepsilon_0>0 \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (6.19)$$

下面将导致矛盾。

因为 $\|x-\pi(x|C_1)\|\leqslant\|x-\pi(x|C_2)\|\leqslant\cdots\leqslant\|x-\pi(x|C_\infty)\|$，故$\{\pi(x|C_n)\}$有界，从而有子列$\{\pi(x|C_{n_k})\}$，$y_1\in X$，满足

$$\pi(x|C_{n_k})\xrightarrow{w}y_1 \quad (k\to\infty)$$

易知 $y_1\in C_\infty$，且

$$x-\pi(x|C_{n_k}) \xrightarrow{w} x-y_1 \qquad (k\to\infty) \qquad (6.20)$$

$$y_1=\pi(x|C_\infty)$$

再证

$$\lim_{n\to\infty}\|x-\pi(x|C_n)\|=\|x-\pi(x|C_\infty)\| \qquad (6.21)$$

如若不然，设 $r>0$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x-\pi(x|C_n)\|=r<\|x-\pi(x|C_\infty)\|$$

令 $C=\{y:\|x-y\|\leqslant r\}$，则 $\{\pi(x|C_{n_k})\}\subset C$，$\pi(x|C_\infty)\ \overline{\in} C$ 由分离定理，$\pi(x|C_{n_k}) \overset{w}{\not\to} \pi(x|C_\infty)\quad (k\to\infty)$，此为矛盾。

由 (6.20)、(6.21)，应用H性质，导出

$$\pi(x|C_{n_k})\to\pi(x|C_\infty) \qquad (k\to\infty)$$

与 (6.19) 式相矛盾。

推论 6.5 设 $L^*_{(M)}$ 自反严格凸，$\{C_n\}$ 为 $L^*_{(M)}$ 中单调闭凸集列，如果$C_n\uparrow C_\infty$或$C_n\downarrow C_\infty$ $(n\to\infty)$，则对任意 $u\in L^*_{(M)}$，有

$$\|\pi(u|C_n)-\pi(u|C_\infty)\|_{(M)}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

证 由定理2.10、定理6.6立即可得。

下面研究 Orlicz 空间中由 σ- 格列给出的预报算子列的收敛性。

设 (Ω,Σ,μ)为全有限不含原子测度空间。Σ的子类Σ_0称为 Σ 的σ-子格，是指ϕ、$\Omega\in\Sigma_0$，且 $\{A_n\}\subset\Sigma_0$ 蕴涵 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\Sigma_0$，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\in\Sigma_0$；$\Omega$上实函数$u(t)$称为关于$\Sigma_0$可测，系指对任意实数 c，集合 $\{t:t\in\Omega,u(t)\geqslant c\}\in\Sigma_0$；设 $C=\{u:u\in L^*_{(M)}$，u 关于 Σ_0 可测$\}$，$\pi(\cdot|C)$称为由σ-格Σ_0给出的预报算子。(易知：C在通常的半序下成为闭凸格)。

设 $\{\Sigma_n\}$为Σ的一列单调的σ-子格，若$\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\cdots$，令 Σ_∞ 为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$张成的$\sigma$-格，记为 $\Sigma_n\uparrow\Sigma_\infty$ $(n\to\infty)$，若 $\Sigma_1\supset\Sigma_2\supset\cdots$，令 $\Sigma_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$，记为$\Sigma_n\downarrow\Sigma_\infty(n\to\infty)$。不妨设$\Sigma_n\neq\phi(n=1,2,\cdots)$。

再令$C_n=\{u:u\in L^*_{(M)}$，u关于Σ_n可测$\}$ $(n=1,2,\cdots\infty)$．

引理 6.2 如果格Σ'生成σ-格Σ''，则对任意$A\in\Sigma''$、$\varepsilon>0$，存在$B\in\Sigma'$，使得

$$\mu(A\triangle B)<\varepsilon$$

此处$A\triangle B$为A与B的对称差．

证 （参见[10]，此处从略）．

引理 6.3 设 $M(u)\in\Delta_2$，$\Sigma_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$，$(\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\cdots)$，$C_0=\{u\in L^*_{(M)}$，$u(t)$ 为 Σ_0可测$\}$，则对任意$u\in C_\infty$，存在 C_0 中简单函数列$\{g_n\}$，满足

$$\|u-g_n\|_{(M)}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

证 无碍一般性，只须对$u\in C_\infty$、$u(t)\geqslant 0$，建立引理 6.3．事实上，设引理对C_∞中非负函数为真，对于任意的$u\in C_\infty$，有

$$u(t)=u(t)\vee 0+u(t)\wedge 0$$

因为C_∞为σ-格，从而$u\vee 0$、$u\wedge 0\in C_\infty$且 $u\vee 0\geqslant 0$，记$-(u\wedge 0)$为g，则 $g(t)\geqslant 0$且$g(t)$为Σ^c_∞可测函数，这里$\Sigma^c_\infty=\{A^c:A\in\Sigma_\infty\}$，由对偶律，$\Sigma^c_\infty$为格$\Sigma^c_0=\{A^c:A\in\Sigma_0\}$张成的$\sigma$-格．现将非负情形应用到$\Sigma^c_0$与$\Sigma^c_\infty$，则有关于$\Sigma_0$可测的简单函数列$\{h_n\}$ 按范数收敛于$-g=u\wedge 0$，以及按范数收敛于$u\vee 0$ 的Σ_0可测简单函数列$\{g_n\}$，令

$$k_n=g_n+h_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

则

$$\|u-k_n\|_{(M)}=\|(u\vee 0+u\wedge 0)-(g_n+h_n)\|_{(M)}$$
$$\leqslant\|u\vee 0-g_n\|_{(M)}+\|u\wedge 0-h_n\|_{(M)}\to 0$$
$$(n\to\infty)$$

以下总设 $u\in C_\infty$，$u(t)\geqslant 0$．

对每个自然数k，将区间$[0,k]$等分为 $k^k{}_2$ 个长度为$\frac{1}{2^k}$的区间．

由于$u(t)$为Σ 可测，注意到Σ_0为格且生成σ-格 Σ_∞，从引理

6.2，有$E_{k,j}\in\Sigma_0$，$(j=1,2,\cdots,k2^k+1)$满足

$$\mu\left(\left\{t\in\Omega:u(t)>k-\frac{j}{2^k}\right\}\Delta E_{k,k2^k+1-j}\right)<\varepsilon_k,$$

$$(j=0,1,2,\cdots,k2^k-1)$$

$$\mu(\{t\in\Omega:u(t)\geqslant 0\}\Delta E_{k,1})<\varepsilon_k$$

这里 $\varepsilon_k(k=1,2,\cdots)$ 待定。顾及当 $t\in\Omega$ 时，$u(t)\geqslant 0$，可取 $E_{k,1}=\Omega$.

对固定的k，令 $E_j=E_{k,k2^k+1-j}$，$(j=0,1,\cdots,k\cdot 2^k-1)$ 定义Σ_0可测的简单函数

$$g_k(t)=\begin{cases}k & t\in E_0\\ k-\dfrac{j}{2^k} & t\in E_j\Big/\bigcup\limits_{i=0}^{j-1}E_i,\ (j=1,2,\cdots,k\cdot 2^k)\end{cases}$$

为进一步简化记号，令

$$K=\{t\in\Omega:u(t)>k\}$$

$$K_j=\left\{t\in\Omega:\ k-\frac{j+1}{2^k}<u(t)\leqslant k-\frac{j}{2^k}\right\},$$

$$j=0,1,\cdots,k\cdot 2^k-2$$

$$K2^k-1=\left\{t\in\Omega:0\leqslant u(t)\leqslant\frac{1}{2^k}\right\}$$

$$L_j=E_{j+1}\Big/\bigcup_{i=0}^{j}E_i,\ (j=0,1,\cdots,k2^k-1)$$

则

$$L_j^c=E_{j+1}^c\cup\left(\bigcup_{i=1}^{j}E_i\right),\ (j=0,1,\cdots,k2^k-1)$$

于是

$$\int_\Omega M[u(t)-g_k(t)]d\mu=\int_K M[u(t)-g_k(t)]d\mu$$

$$+\sum_{j=0}^{k2^k-1}\int_{K_j}M[u(t)-g_k(t)]d\mu \tag{6.22}$$

根据在K上，$u(t)>k$，$0\leqslant g_k(t)\leqslant k$，从而

$$0\leqslant u(t)-g_k(t)\leqslant u(t),\qquad t\in K$$

再由$M[u(t)]$可积，故

$$\int_K M[u(t)-g_k(t)]d\mu\leqslant\int_K M[u(t)]d\mu\to 0\quad (k\to\infty)\tag{6.23}$$

下面估计（6·22）右方第二项．

对于每个j，$0\leqslant j\leqslant k2^k-1$

$$\int_{K_j} M[u(t)-g_k(t)]d\mu=\int_{K_j\cap L_j}+\int_{K_j\cap L_j^c}\tag{6.24}$$

而

$$\int_{K_j\cap L_j} M[u(t)-g_k(t)]d\mu\leqslant\int_{K_j\cap L_j} M\left(\frac{1}{2^k}\right)d\mu$$

$$\leqslant M\left(\frac{1}{2^k}\right)\mu(K_j),\quad (j=0,1,\cdots,k2^k-1)\tag{6.25}$$

又对 $j=0,1,\cdots,k2^k-2$，有

$$K_j\cap E_{j+1}^c\subset\left\{t\in\Omega:u(t)>k-\frac{j+1}{2^k}\right\}\triangle E_{j+1}$$

$$K_j\cap E_i\subset\left\{t\in\Omega:u(t)>k-\frac{i}{2^k}\right\}\triangle E_i,\quad i=0,1,\cdots,j$$

且对于 $j=k2^k-1$，也有

$$K_j\cap E_{j+1}^c\subset\{t\in\Omega:u(t)\geqslant 0\}\Delta E_{j+1}$$

$$K_j\cap E_i\subset\left\{t\in\Omega:u(t)>k-\frac{i}{2^k}\right\}\triangle E_i,\ i=1,2,\cdots,j$$

由此即得

$$\mu(E_j\cap L_j{}^c)\geqslant(j+2)\varepsilon_k\leqslant(k2^k+1)\varepsilon_k,\quad (j=0,1,\cdots,k2^k-1)$$

因而

$$\int_{K_j\cap L_j^c} M[u(t)-g_k(t)]\,d\mu\leqslant\int_{K_j\cap L_j^c} M(k)du$$

$$\leqslant M(k)(k2^k+1)\varepsilon_k, \quad (j=0,1,\cdots,k2^k+1) \tag{6.26}$$

选 $\{\varepsilon_k\}$ 使 $M(k)(k2^k)(k2^k+1)\varepsilon_k \to 0 \ (k\to\infty)$，由 (6.24)、(6.25)，我们得到

$$\sum_{j=0}^{k2^k-1}\int_{K_j} M[u(t)-g_k(t)]d\mu$$

$$\leqslant M\left(\frac{1}{2^k}\right)\sum_{j=0}^{k2^k-1}\mu(K_j)+(k2^k)M(k)(k2^k+1)\varepsilon_k$$

$$\leqslant M\left(\frac{1}{2^k}\right)\mu(\Omega)+M(k)(k2^k)(k2^k+1)\varepsilon_k \to 0 \quad (k\to\infty) \tag{6.27}$$

由 (6.22)、(6.23)、(6.27) 式，并利用 $M(u)\in\Delta_2$，即得

$$\|u-g_k\|_{(M)}\to 0 \qquad (k\to\infty)$$

引理 6.4 若 $M(u)\in\Delta_2$，则

(1) $\Sigma_n \downarrow \Sigma_\infty \Rightarrow C_n \downarrow C_\infty \qquad (n\to\infty)$；

(2) $\Sigma_n \uparrow \Sigma_\infty \Rightarrow C_n \uparrow C_\infty \qquad (n\to\infty)$．

证 (1) 明显，仅需证 (2)．

由 C_n 的定义，并顾及到 C 的闭性，我们有

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n} \subset C_\infty$$

任取 $u\in C_\infty$，$\varepsilon>0$，由引理 6.3，存在关于 $\Sigma_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$ 可测的简单函数 $g(t)$，满足

$$\|u-g\|_{(M)}<\varepsilon$$

因为 $g(t)$ 为简单函数，而且 $\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\cdots\subset\Sigma_0$，$\Sigma_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Sigma_n$，故必有 n_0，使得 $g(t)$ 关于 Σ_{n_0} 可测，从而 $g\in C_{n_0}$，于是 $u\in\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n}$．因此

$$C_\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$$

定理 6.7 设 $M(u)\in\Delta_2\cap\nabla_2$且 $M(u)$ 严格凸，$\Sigma_n\downarrow\Sigma_\infty$ 或 $\Sigma_n\uparrow\Sigma_\infty$ $(n\to\infty)$，则对任意 $u\in L^*_{(M)}$

$$\|\pi(u|C_n)-\pi(u|C_\infty)\|_{(M)}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

证 由定理2.10，$L^*_{(M)}$ 为自反，H严格凸空间，从而据引理6.4、推论6.5，立即可得．

§4 一个非二次指标最优控制问题

考虑分布参数系统

$$\begin{cases} (\lambda-\Delta)y=f, & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial n}=g, & x\in\Gamma_1 \\ y=v, & x\in\Gamma_0 \end{cases} \qquad (6.28)$$

这里Δ为 Laplace 算子，Ω为R^n中具有光滑边界Γ的有界开域，Ω局部地位于Γ的一侧，$\lambda>0$ $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1$，$\Gamma_0\cap\Gamma_1=\phi$，$f\in L^2(\Omega)$，$g\in L^2(\Gamma_1)$，$v$为$\Gamma_0$上待定的边界条件．

工程中提出的许多问题均可归结为：给定v的一个“约束”U_{ad}，在U_{ad}中是否唯一存在v^*，使得（6.28）式的解$y(v^*)$与给定的函数h“最接近”？此即一个最优边界控制问题[11]．

对于$h\in L^1(\Omega)$，不宜采用“p次（$1<p<\infty$）指标”：$J(v)=\|y(v)-h\|_{L^p}$ $v\in U_{ad}$ 来刻画（6.28）的解与h的接近程度；如用“一次指标”：$J(v)=\|y(v)-h\|_{L^1}$ $v\in U_{ad}$讨论，又不能保证最优控制的唯一性（因为范数$\|\cdot\|_{L^1}$不严格凸）．本节借助于 Orlicz 空间，引入与h有关的非二次指标J_h:$J_h(v)=\|y(v)-h\|_{(M)}$$v\in U_{ad}$（这里$M(u)$为一个适当的$N$函数，且当$h\in L^2(\Omega)$时，$J_h$为二次指标）．用几何技巧证得在适当的“允许控制集”U_{ad}内，最优控制唯一存在．

定理 6.8 如果$h\in L^1(\Omega)$，则存在光滑、严格凸的 Orlicz

空间 $L^*_{(M)}(\Omega)$ 满足

(1) $h\in L^*_{(M)}(\Omega)$，(2) $L^2(\Omega)\subset L^*_{(M)}(\Omega)$ 且当 $h\in L^2(\Omega)$ 时，$L^2(\Omega)=L^*_{(M)}(\Omega)$．

证 若有 $p>1$，$h\in L^p(\Omega)$，当 $p<2$ 时，取 $M(u)=\frac{|u|^p}{p}$ 当 $p\geqslant 2$ 时，取 $M(u)=\frac{|u|^2}{2}$，则 $M(u)$ 满足定理的要求．否则，$h\in L^1(\Omega)\backslash L^p(\Omega)$ $(1<p\leqslant\infty)$，令

$$G_n=\{t\in\Omega:n-1\leqslant|h(t)|<n\}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\text{mes}G_n\leqslant\int_\Omega|h(t)|dt+\text{mes}\Omega<\infty$．选一列自然数 $\{m_k\}$，满足 $m_k\geqslant k$，$m_{k+1}\geqslant 2m_k$，且

$$\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1}n\cdot\text{mes}G_n<\frac{1}{2^k}\qquad(k=1,2,\cdots)$$

命

$$p_1(t)=\begin{cases}t & 0\leqslant t<1\\ 1 & 1\leqslant t<m_1\\ k & m_k\leqslant t<m_{k+1}\qquad(k=1,2,\cdots)\end{cases}$$

则 $M_1(u)=\int_0^{|u|}p_1(t)dt$ 为N函数，而且

$$\int_\Omega M_1(h(t))dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}M_1(h(t))\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M_1(n)\text{mes}G_n$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}np(n)\text{mes}G_n\leqslant\sum_{n=1}^{m_1-1}n\cdot\text{mes}G_n$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}<\infty$$

故 $h\in L^*_{(M_1)}(\Omega)$．

又由 $m_k\geqslant k$ $(k=1,2,\cdots)$，有

$$\mathrm{p}_1(t)\leqslant t \qquad 0\leqslant t<\infty$$

从而$M_1(u)$慢于$|u|^2$，于是 $L^2(\Omega)\subset L^*_{(M_1)}(\Omega)$.

当 $t\geqslant m_1$ 时，设 $m_k\leqslant t<m_{k+1}$

则 $2m_k\leqslant 2t<2m_{k+1}<m_{k+2}$，故

$$p_1(2t)\leqslant k+1\leqslant 2k=2p_1(t)$$

从而当 $u\geqslant u_0=2m_1$时

$$M_1(2u)=\int_0^{2u}\mathrm{p}_1(t)dt\leqslant 2u\mathrm{p}_1(2u)$$

$$\leqslant 16\frac{u}{2}\mathrm{p}_1\left(\frac{u}{2}\right)\leqslant 16M_1(u)$$

亦即$M_1(u)\in\Delta_2$. 再令

$$\mathrm{p}(t)=\frac{M_1(t)}{t} \qquad M(u)=\int_0^{|u|}\mathrm{p}(t)dt$$

则 $M(u)$与$M_1(u)$等价，于是 $M(u)\in\Delta_2$，但 $\mathrm{p}(t)$ 连续、严格增，从而由定理2.2, 2.19, $L^*_{(M)}$光滑、严格凸，并有

$$h\in L^*_{(M)}(\Omega),\quad L^2(\Omega)\subset L^*_{(M)}(\Omega)$$

以下固定$M(u)$为定理6.8中所构造的N函数，设$N(v)$为其余N函数 . $h\in L^1(\Omega)$.

引理 6.5 $C_0^\infty(\Omega)$在$E_N(\Omega)$中稠 .

证 仿照 $C_0^\infty(\Omega)$在 $L^p(\Omega)(1\leqslant \mathrm{p}<\infty)$中稠的证明 .

引理 6.6 对 $v\in L^2(\Gamma_0)$，记 (6.28) 的广义解为 $y(v)$ ，定义 A: $v\mapsto y(v)$，则

(1) A为从$L^2(\Gamma_0)$到$L^*_{(M)}(\Omega)$的连续算子;

(2) $A(v)$在0点 Frèchet 可导，且

$$A(v)=A'(0)v+A(0) \qquad v\in L^2(\Gamma_0)$$

证 (1) 对$v\in L^2(\Gamma_0)$，(6.28) 式有唯一广义解 $y(v)$，$y(v)\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)\subset H^0(\Omega)=L^2(\Omega)\subset L^*_{(M)}(\Omega)$，从而$A$为从$L^2(\Gamma_0)$ 到$L^*_{(M)}(\Omega)$内的算子 . (这里$H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$、$H^0(\Omega)$为 Sobolev 空间).

设 $v_n \in L^2(\Gamma_0)(n=0,1,\cdots)$，$\|v_n - v_0\|_{L^2(\Gamma_0)} \to 0(n\to\infty)$，由(6.28)式的解对$v$的连续相依性，$L^2(\Omega)\subset L^*_{(M)}(\Omega)$，有 $\beta>0$，使得

$$\|y(v_n)-y(v_0)\|_{(M)} \leqslant \beta\|y(v_n)-y(v_0)\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

(2) 任取$\varphi\in C^\infty(\Omega)\cap L^\infty(\overline{\Omega})$．由(6.28)式，应用 Green 公式

$$\int_\Omega f\varphi dt = \int_\Omega (\lambda-\Delta)y(v)\varphi dt$$

$$= -\int_\Gamma \frac{\partial y(v)}{\partial n}\varphi dt + \int_\Gamma y(v)\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt + \int_\Omega y(v)(\lambda-\Delta)\varphi dt$$

$$= -\int_{\Gamma_0}\frac{\partial y(v)}{\partial n}\varphi dt - \int_{\Gamma_1} g\varphi\, dt + \int_{\Gamma_0} v\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt + \int_{\Gamma_1} y(v)\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt$$

$$+\int_\Omega y(v)(\lambda-\Delta)\varphi dt \tag{6.29}$$

对于任意 $\Psi\in C_0^\infty(\Omega)$，由解的正则性，存在 $\varphi\in C^\infty(\Omega)\cap L^\infty(\overline{\Omega})$，满足方程

$$\begin{cases} (\lambda-\Delta)\varphi = \Psi, & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, & x\in\Gamma_1 \\ \varphi = 0, & x\in\Gamma_0 \end{cases} \tag{6.30}$$

将此函数代入(6.29)式，得到

$$\int_\Omega y(v)\Psi dt = \int_\Omega y(v)(\lambda-\Delta)\varphi dt$$

$$= \int_\Omega f\varphi\, dt + \int_{\Gamma_1} g\varphi\, dt - \int_{\Gamma_0} v\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt \tag{6.31}$$

在(6.31)式中，分别将v换为$\theta v(0<\theta<1)$与0，记为(*)、(**)．由(*)减(**)，即得

$$\int_{\Omega}[y(\theta v)-y(0)]\Psi dt=-\int_{\Gamma_0}\theta v\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt \tag{6.32}$$

再由 (6.31) 式减(**)又得

$$\int_{\Omega}[y(v)-y(0)]\Psi dt=-\int_{\Gamma_0}v\frac{\partial\varphi}{\partial n}dt \tag{6.33}$$

于是由 (6.32) 、 (6.33) 便知

$$\int_{\Omega}\left\{\frac{y(\theta v)-y(0)}{\theta}-[y(v)-y(0)]\right\}\Psi dt=0$$

因为$C_0^\infty(\Omega)$在$E_N(\Omega)$中稠，故由$A(v)=y(v)$，$v\in L^2(\Gamma_0)$，得

$$\left\|\frac{A(\theta v)-A(0)}{\theta}-[A(v)-A(0)]\right\|_{(M)}=0\quad 0<\theta<1 \tag{6.34}$$

据定义，$A(v)$在0点的 Frèchet 导数存在，且

$$A'(0)v=A(v)-A(0)$$

引理 6.7 设 U_{ad} 为$L^2(\Gamma_0)$ 中有界闭凸集，则 $C=\{y(v):v\in U_{ad}\}$ 为$L^*_{(M)}$ 中弱列紧闭凸集．

证 设 $y(v_1)$、$y(v_2)\in C$，由引理6.6

$$\frac{1}{2}[y(v_1)+y(v_2)]$$

$$=\frac{1}{2}[A'(0)v_1+A(0)]+\frac{1}{2}[A'(\theta)v_2+A(0)]$$

$$=A'(0)\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)+A(0)=y\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)$$

因$\frac{v_1+v_2}{2}\in U_{ad}$，故$C$为凸集．

任取一列 $\{y(v_n)\}\subset C$，由于U_{ad}为 $L^2(\Gamma_0)$ 中有界闭凸集，故有$\{v_n\}$的子列 $\{v_{n_k}\}$ 满足

$$v_{n_k}\xrightarrow{w}v_0\in U_{ad}$$

由于$A'(0)$为从$L^2(\Gamma_0)$到$L^*_{(M)}(\Omega)$的有界线性算子，因此

$$A'(0)v_{n_k}\xrightarrow{w}A'(0)v_0\qquad(k\to\infty)$$

于是

$$y(v_{n_k}) = A'(0)v_{n_k} + A(0) \xrightarrow{w} A'(0)v_0 + A(0) = y(v_0)$$

$(k\to\infty)$ ．而且$y(v_0)\in C$，所以，C为弱列紧闭凸集．

定理 6.9 设 U_{ad} 为$L^2(\Gamma_0)$中有界闭凸集，$J_h(v)=\|y(v)-h\|_{(M)}$ $v\in U_{ad}$，则唯一存在 $v^*\in U_{ad}$，

$$J_h(v^*) = \inf_{v\in U_{ad}} J_h(v)$$

证 设 $C=\{y(v):v\in U_{ad}\}$，则C为 $L^*_{(M)}$ 中弱列紧闭凸集，从而由$L^*_{(M)}(\Omega)$的严格凸性，唯一存在 $y\in C$，使得

$$\|y-h\|_{(M)} = \inf_{y(v)\in C} \|y(v)-h\|_{(M)}$$

亦即有 $v^*\in U_{ad}$，使得 $y=y(v^*)$，且

$$J_h(v^*) = \inf_{v\in U_{ad}} J_h(v)$$

如果又有$v_1^*\in U_{ad}$，满足$y(v_1^*)=y=y(v^*)$，$x\in\Omega$，由著名迹定理，$v_1^*=y(v_1^*)=y(v^*)=v^*, x\in\Gamma_0$ ．

推论 6.7 设 $U_{ad}=\{v(t): v(t)$ 定义于 Γ_0，$m_1\leqslant v(t)\leqslant m_2\}$，$h\in L^2(\Omega)$，则唯一存在 $v^*\in U_{ad}$，使得

$$\bar{J}_h(v^*) = \inf_{v\in U_{ad}} \bar{J}_h(v)$$

这里$\bar{J}_h(v)=\|y(v)-h\|_{L^2}$ $v\in U_{ad}$ ．

证 易知 U_{ad} 为 $L^2(\Gamma_0)$ 中有界闭凸集，又由定理6.8，$L^2(\Omega)=L^*_{(M)}(\Omega)$，从而由定理6.9立即可得 ．

定理 6.10 设 $h\bar{\in}C$，则 $v^*\in U_{ad}$，$J_h(v^*)=\inf\limits_{v\in U_{ad}} J_h(v)$ $\Leftrightarrow$对任意 $v\in U_{ad}$

$$\int_\Omega [y(v^*)-y(v)]\, p\left(\frac{|h-y(v^*)|}{\|h-y(v^*)\|_{(M)}}\right)\operatorname{sign}(h-y(v^*))dt\geqslant 0$$

证 因$M(u)\in\Delta_2$、$p(u)$连续，C为 $L^*_{(M)}$ 中闭凸集，由定理

6.2，即可导出．

§5 最小 Orlicz 范数控制

在分布参数系统的最优控制中，最小能量控制具有明显的实际意义，其抽象形式便是最小范数控制．

考虑单输入的分布参数系统

$$x(t)=V(t)x_0+\int_0^t U(t,\tau)bu(\tau)d\tau$$

这里控制空间为 Orlicz 空间 $L_M^*[0,T]$，即 $u\in L_M^*[0,T]$；状态空间为 Banach 空间 X，即 $x_0\in X$，$x(t)\in X$，$0\leqslant t\leqslant T$；$V(t)$ $0\leqslant t\leqslant T$，$U(t,\tau)$ $0\leqslant\tau<t\leqslant T$ 是从X到X的单参数与双参数的有界算子族；$b\in X$．令

$$Q_T=\{x\mid x\in X,\ \exists u\in L_M^* \text{ 使得 } x=x(T)=V(T)x_0+\int_0^T U(T,\tau)bu(\tau)d\tau\}$$

无碍一般性，以下总设 $x_0=0$．

对 $\overline{x}\in Q_T$ $(\overline{x}\neq 0)$，再令

$$C_{\overline{x}}=\left\{u:\ u\in L^*{}_M,\ \text{使得}\ \overline{x}=\int_0^T U(T,\tau)bu(\tau)d\tau\right\}$$

最小 Orlicz 范数控制问题，就是确定 $u_0\in C_{\overline{x}}$，使得

$$\|u_0\|_M=\inf_{u\in C_{\overline{x}}}\|u\|_M$$

特别，当 $M(u)=\dfrac{|u|^2}{2}$时，最小 Orlicz 范数控制问题，便是最小能量控制问题．

本节做如下假设

(1) $M(u)\in\Delta_2$且严格凸，$N(v)$亦然；

(2) $\|U(T,\cdot)b\|\in L_M^*[0,T]$；

(3) X自反且有无条件基$\{e_n\}$；

(4) $\overline{x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$, $U(T,\tau)b=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\tau)e_n$.

由于$\{e_n\}$为无条件基，对 $\tau\in[0,T]$，自然数 $n\geq1$，$|g_n(\tau)|$ $=\|g_n(\tau)e_n\|/\|e_n\|\leq\|\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\tau)e_k\|/\|e_n\|=\|U(T,\tau)b\|/\|e_n\|$ 从而由 (2) 推知 $g_n\in L^*_{(N)}[0,T]$ $(n=1,2,\cdots)$.

$u\in L^*_M$ 称为 Orlicz 范数可达，是指有$v\in L^*_{(N)}$，满足 $\|v\|_{(N)}$ $=1$，$\|u\|_M=\int_0^T u(t)v(t)dt$.

$u\in L^*_M$称为 Luxemburg 范数可达，是指有 $v\in L^*_N$，$\|v\|_N$ $=1$，$\|u\|_{(M)}=\int_0^T u(t)v(t)dt$.

做为必要的准备知识，先证明几个辅助命题。其中引理6.8、6.9有其独立意义.

引理 6.8 设p(u)连续，$u\in L^*_M$，则 $\|u\|_M$ 可达的充分必要条件是存在 $k>0$，使得

$$\int_0^T N[p(k|u(t)|)]dt=1$$

证 必要性

由定理1.27，存在 $k>0$，使得

$$\frac{1}{k}\left\{1+\int_0^T M[ku(t)]dt\right\}=\|u\|_M=\int_0^T u(t)v(t)dt$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^T ku(t)v(t)dt$$

$$\leq\frac{1}{k}\left\{\int_0^T N[v(t)]dt+\int_0^T M[ku(t)]dt\right\}$$

$$\leq\frac{1}{k}\left\{1+\int_0^T M[ku(t)]dt\right\}$$

所以 $\int_0^T N[v(t)]dt=1$ 而且

$$\int_0^T \{N[v(t)]+M[ku(t)]-ku(t)v(t)\}dt=0$$

从而

$$N[v(t)]+M[ku(t)]=ku(t)v(t) \qquad a.e.$$

由 Young 不等式成为等式的条件(1.11)式，并注意到$p(u)$的连续性，这时只能

$$v(t)=p(k|u(t)|)\text{sign}u(t) \tag{6.35}$$

于是 $\int_0^T N[p(k|u(t)|)]dt=\int_0^T N[v(t)]dt=1$

充分性

由定理1.25，有

$$\|u\|_M=\int_0^T |u(t)|p(k|u(t)|)dt$$

且 $\|p(k(|u(t)|))\|_{(N)}=1$. 因此只要取

$$v(t)=p(k|u(t)|)\text{sign}u(t)$$

则 $v\in L^*_{(N)}$，$\|v\|_{(N)}=1$，而且 $\|u\|_M=\int_0^T u(t)v(t)dt$.

引理 6.9 设 $p(u)$连续，$u\in L^*_M$ ，则 $\|u\|_{(M)}$可达的充分必要条件是：$\int_0^T M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]dt=1$ 且$p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\in L^*_N$.

证 必要性

设有$v\in L^*_N$ ，$\|v\|_N=1$，满足 $\|u\|_{(M)}=\int_0^T u(t)v(t)\,dt$，由定理1.27，有 $k>0$，使得

$$\frac{1}{k}\left\{1+\int_0^T N[kv(t)]\,dt\right\}=\|v\|_N=1=\int_0^T \frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}v(t)dt$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\left\{\int_0^T M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]dt+\int_0^T N[kv(t)]dt\right\}$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\left\{1+\int_0^T N[kv(t)]dt\right\}$$

由此得 $\int_0^T M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]dt=1$，而且

$$M\left[\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}\right]+N[k\,v(t)]=\frac{u(t)}{\|u\|_{(M)}}kv(t)\quad a.e.$$

同样由（1.11）式，并顾及到$p(u)$的连续性，我们有

$$kv(t)=p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}\,u(t)$$

从而 $p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\in L^*_N$.

充分性

取 $\alpha>0$，使 $\left\|\alpha p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\right\|_N=1$，因而

$$\|u\|_{(M)}=\|u\|_{(M)}\left\|\alpha p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\right\|_N$$

$$\geqslant\int_0^T u(t)\alpha p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\mathrm{sign}\,u(t)dt$$

但是，另一方面，又有

$$\|u\|_{(M)}\leqslant\|u\|_{(M)}\,\alpha\left\{1+\int_0^T N\left[p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\right]dt\right\}$$

$$=\|u\|_{(M)}\,\alpha\left\{\int_0^T M\left[\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right]dt+\int_0^T N\left[p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right)\right]dt\right\}$$

$$= \|u\|_{(M)} \int_0^T \frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}} \cdot a \cdot p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right) dt$$

$$= \int_0^T u(t) a p\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{(M)}}\right) \operatorname{sign} u(t) dt$$

因此，只要取

$$v(t) = a p\left(\frac{|u(t)|}{\|v\|_{(M)}}\right) \operatorname{sign} u(t)$$

引理 6.10 唯一存在 $u_0 \in C_{\bar{x}}$，使得

$$\|u_0\|_M = \inf_{u \in C_{\bar{x}}} \|u\|_M$$

证 由$C_{\bar{x}}$ 的定义，易知$C_{\bar{x}}$ 为闭凸集，而且$0 \bar{\in} C_{\bar{x}}$。由假设（1），知 $L^*_M[0,T]$ 为自反、光滑、严格凸空间，从而由定理0.30，0 在 $C_{\bar{x}}$ 中存在最佳逼近元 u_0，$\|u_0\|_M = \inf\limits_{u \in C_{\bar{x}}} \|u\|_M$；再由严格凸性，便知$u_0$唯一。

引理 6.11 设 $\lambda^0 = \{\lambda_n^0\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 a_n = 1$，而且 $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n\|_{(N)} = \inf\limits_{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n = 1} \|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n\|_{(N)}$。若 $u_0 \in C_{\bar{x}}$ 为最小 Orlicz 范数控制，即 $\|u_0\|_M = \inf\limits_{u \in C_{\bar{x}}} \|u\|_M$，则

$$\|u_0\|_M = 1 \Big/ \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n\|_{(N)}$$

证 由 $\bar{x} = \int_0^T U(T,\tau) b u_0(\tau) d\tau$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) e_n\right) u_0(\tau) d\tau$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T g_n(\tau) u_0(\tau)\, d\tau\right) e_n$$

从而得到 $a_n=\int_0^T g_n(\tau)u_0(\tau)d\tau \quad (n=1,2,\cdots)$

任选使 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n=1$, $\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\|_{(N)}<\infty$ 的 $\lambda=\{\lambda_n\}$，由上式可得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n(\tau)\right)u_0(\tau)d\tau$$

$$\leqslant\int_0^T\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n(\tau)\right||u_0(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\|_{(N)}\|u_0\|_M \tag{6.36}$$

于是 $$1\Big/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^0 g_n\|_{(N)}=1\Big/\inf_{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n=1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\|_{(N)}\leqslant\|u_0\|_M .$$

如果上面的等式不成立，即

$$1\Big/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^0 g_n\|_{(N)}<\|u_0\|_M \tag{6.37}$$

定义

$$X_0=\left\{g: g\in L_{(M)}^*,\ \exists\{\lambda_n\}\text{使得}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n<\infty\text{ 且 }g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n(t)\right\}$$

则X_0为$L_{(M)}^*$的线性子空间．在X_0上定义泛函

$$F(g)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n \qquad \text{当 } g(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n(\tau)\text{时}$$

$F(g)$是唯一确定的．事实上，如若 $g(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n g_n(\tau)$ 则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)\int_0^T g_n(\tau)u(\tau)d\tau\right|$$

$$=\left|\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)g_n(\tau)\right)u(\tau)d\tau\right|$$

$$\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu_n)g_n\right\|_{(N)}\|u\|_M=0$$

至于$F(g)$的线性是显然的，又F的范数

$$\|F\|=\sup_{\substack{g\neq 0\\ g\in X_0}}\frac{|F(g)|}{\|g\|_{(N)}}=\sup_{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n<\infty}\frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n\right|}{\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\right\|_{(N)}}$$

$$=\frac{1}{\inf\limits_{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n<\infty}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\right\|_{(N)}}=\frac{1}{\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^0 g_n\right\|_{(N)}}$$

依 Hahn－Banach定理，将F保范延拓到 $L^*_{(N)}$ 上，则存在$\overline{u}\in L^*_M$，使得

$$\|\overline{u}\|_M=1\Big/\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^0 g_n\right\|_{(N)},F(g)=\int_0^T g(\tau)\overline{u}(\tau)d\tau \quad g\in L^*_{(N)} \tag{6.38}$$

特别

$$a_n=F(g_n)=\int_0^T g_n(\tau)\overline{u}(\tau)d\tau \quad (n=1,2,\cdots)$$

因而

$$\overline{x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^T g_n(\tau)\overline{u}(\tau)d\tau\right)e_n$$

$$=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\tau)e_n\right)\overline{u}(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^T U(T,\tau) b \overline{u}(\tau) d\tau$$

即 $\overline{u} \in C_{\overline{x}}$，然而由（6.37）、（6.38）式，可推知

$$\|\overline{u}\|_M < \|u_0\|_M \qquad \text{且 } \overline{u} \in C_{\overline{x}}$$

这与u_0为最小 Orlicz 范数控制矛盾．因此

$$\|u_0\|_M = 1 \Big/ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)}$$

定理 6.11 若 $u_0 \in C_{\overline{x}}$ 为最小 Orlicz 范数控制，则

$$u_0(t) = \frac{1}{k} q\left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n(t) \right| \Big/ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)} \right) \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^0{}_n g_n(t)$$

这里 $k = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)} \left\| q\left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right| \Big/ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)} \right) \right\|_M$，其中$\{\lambda_n^0\}$由引理6.11确定．

证 由引理6.11与（6.36）式有

$$1 \Big/ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)}$$

$$= \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n(t) \Big/ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)} \right] u_0(t) dt$$

$$= \int_0^T \left[\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n(t) \right| \Big/ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 g_n \right\|_{(N)} \right] |u_0(t)| dt$$

$$= \|u_0\|_M \tag{6.39}$$

即u_0的 Orlicz 范数可达。由引理6.8，存在$k>0$，满足

$$\int_0^T N[p(k|u_0(t)|)] dt = 1 \tag{6.40}$$

应用定理1.25有

$$\|u_0\|_M = \int_0^T |u_0(t)|\, p(k|u_0(t)|)\, dt \tag{6.41}$$

再由 L^*_M 的光滑性，并顾及到（6.40）式蕴涵 $\|p(k|u_0|)\|_{(N)} = 1$，知（6.39）式与（6.41）式蕴涵

$$p(k|u_0(t)|) = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right| \Big/ \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}$$

从（6.39）式可知

$$\operatorname{sign} u_0(t) = \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)$$

于是，注意到$p(u)$、$q(v)$互为反函数，便有

$$u_0(t) = \frac{1}{k} q\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right| \Big/ \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}\right)$$

$$\operatorname{sign} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t) \tag{6.42}$$

下面计算k，由于

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 a_n = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right) u_0(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{k} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}$$

$$\int_0^T p\left[q\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right| \Big/ \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}\right)\right] q\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right| \Big/ \right.$$

$$\left. \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}\right) dt \tag{6.43}$$

为简单计，令

$$h(t) = q\left(\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right| \Big/ \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}\right)$$

则

$$\int_0^T N[p(h(t))]\, dt = \int_0^T N\left[\left|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n(t)\right| \Big/ \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}\right] dt = 1$$

从而由定理1.25

$$\|h\|_M=\int_0^T p(|h(t)|)|h(t)|dt$$

$$=\int_0^T p[q(|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)|/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{(N)})]$$

$$q(|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)|/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{(M)})dt \qquad (6.44)$$

由（6.43）、（6.44）式，得到

$$k=\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{(N)}\|q(|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n|/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{(N)})\|_M$$

推论 6.8 设 $M(u)=\frac{|u|^s}{s}$ $(1<s<\infty)$，$u_0\in C_{\bar{x}}$ 为最小 L^s 范数控制，则

$$u_0(t)=[|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)|^{s'-1}/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{L^{s'}}^{s'}]$$

$$\text{sign}(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t))$$

这里 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 a_n=1$ 且 $\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{L^s}=\inf\limits_{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n=1}\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n g_n\|_{L^{s'}}$，

$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$．

证 因为 $M(u)=\frac{|u|^s}{s}(1<s<\infty)$，则 $N(v)=\frac{|v|^{s'}}{s'}$ $\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1\right)$，从而 $q(|v|)=|v|^{s'-1}$，于是由定理6.11，有

$$u_0(t)=\frac{1}{k}q\left(|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)|/\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{(N)}\right)\text{sign}(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^0{}_n g_n(t))$$

$$=\left(|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)|^{s'-1}/k\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\|_{(N)}^{s'-1}\right)$$

$$\operatorname{sign}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)\right) \tag{6.45}$$

将（6.45）代入

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 a_n=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n(t)\right)u_0(t)dt$$

得到

$$k\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\right\|_{(N)}^{s'-1}=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0 g_n\right\|_{L^{s'}}^{s'},$$

推论 6.9 设 $X=H$ 为 Hilbert 空间，$M(u)=\frac{|u|^2}{2}$，$U(T,t)=e^{-(T-t)A}b$，$b\in H$，$\{e^{-tA}:t\geqslant 0\}$ 为H中闭稠定算子$-A$生成的(c_0)类算子半群．

又设$\{\tau_n\}$为A的全部本征值（不妨设其重数为1），对应的本征元$\{\varphi_n\}$构成H的完全基，$\{\Psi_n\}$为其对偶列，则$u_0\in C_{\overline{x}}$为最小能量控制蕴涵

$$u_0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0\langle b,\ \Psi_n\rangle e^{-(T-t)\tau_n}\Big/\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0\langle b,\Psi_n\rangle e^{-(T-t)\tau_n}\right)^2dt$$

这里$\{\lambda_n{}^0\}$满足$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0\langle\overline{x},\Psi_n\rangle=1$且

$$\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n{}^0\langle b,\Psi_n\rangle e^{-(T-t)\tau_n}\right)^2dt=$$

$$=\inf_{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle\overline{x},\Psi_n\rangle=1}\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle b,\ \Psi_n\rangle e^{-(T-t)\tau_n}\right)^2dt$$

证 因为$\overline{x}$、$b\in H$，则

$$\overline{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\langle\overline{x},\ \Psi_n\rangle\varphi_n,\quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\langle b,\Psi_n\rangle\varphi_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

于是由谱映射定理．

$$e^{-(T-t)A}b=\sum_{n-1}^{\infty}\langle b,\ \Psi_n\rangle e^{-(T-t)\tau_n}\varphi_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

从而由推论6.8立即可得．

附记 本章内容基本上取材于〔1〕〔6〕〔9〕〔10〕〔12〕〔16〕．其中定理6.1、6.2、6.3、6.4 属于王玉文、陈述涛[1]；推论6.2也见谢敦礼的[2]，推论6.4取自[13]；例6.1、定理6.5归功于Darst 等[6]；定理6.6、6.7属于王玉文[9]；而引理6.3选取Darst 等的[10]；定理6.8、6.9、6.10，参阅王玉文、陈述涛的[12]；定理6.11，引理6.8、6.9，见王廷辅、王玉文的[16]．

§4 所用到的引理6.7，首先由胡顺菊、喻文唤[11]对 $M(u)=\frac{|u|^2}{2}$ 证得．据悉周爱辉也独立地得到定理6.1、6.2．

关于 Orlicz 空间中最佳逼近问题，Landers 与 Rogge[8, 15]做了非常出色的工作，但由于他们所用的主要工具是格论，而不是几何技巧，故未收入本章，有兴趣的读者可直接参看他们的论文．

参 考 文 献

〔1〕 王玉文、陈述涛，Orlicz 空间内最佳逼近算子，纯粹数学与应用数学 (1986)，no.1，44—51．

〔2〕 谢敦礼，Orlicz 空间上最佳逼近元的特征，杭州大学学报，(1984)．

〔3〕 吴从炘、王廷辅，《奥尔里奇空间及其应用》，黑龙江科技出版社，1983．

〔4〕 A.L.Brown, J.Func.Anal., (1974)．

〔5〕 T.B.Blatter, Appr.Theory Ⅱ, Texas, (1976), 299—302．

〔6〕 R.B.Darst, D.A.Legg, D.W.Townsend, Prediction in Orlicz Spaces, Manuscripta Math., 35 (1981), 91

—103 .

〔7〕 D.Landers, L.Rogge, A Short Proof for a.e.Convergence of Generalized Conditional Expectations, Proc. Amer.Math.Soc., 79 (1980) , 471—473 .

〔8〕 ————,————, Best Approximants in L_ϕ—Spaces, Z.Wahrschei.Verw.Gebiete,51 (1980) , 215—237 .

〔9〕 王玉文，Banach 空间中预报算子列的极限定理，哈尔滨科技大学学报， (1985),no.2.

〔10〕 R.B.Darst, G.A. Deboth, Two approximation properties and a Radon-Nikodyn derivative for lattices of sets, Indiana University Math. J.,21 (1971) , 355—362 .

〔11〕 胡顺菊、喻文唤，一个未知边值条件的辨识问题——液浮陀螺仪内浮筒表面温度的估计，系统科学与数学，4 (1984),no.3,173—182 .

〔12〕 王玉文、陈述涛，Orlicz 空间中一个最优控制问题（待发表）.

〔13〕 H.П.Корнейкук,《逼近论的极值问题》，（孙永生译），上海科技出版社， (1982) .

〔14〕 D. Landers, L. Rogge, Characterization of p-Predictors, Proc.Amer.Math.Soc.,76,(1979) , 307—309.

〔15〕 ————————, A Characterization of Best Φ-Approximants, Trans. Amer. Math. Soc., 267(1981), 259—364 .

〔16〕 王廷辅、王玉文，分布参数系统的最小 Orlicz 范数控制（待发表）.

〔17〕 陈文岘，《非线性泛函分析》，甘肃人民出版社,(1982).